SIF5015 Diskret matematikk
Lørdag 27. mai 2000
løsningsforslag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

1 Vi har følgende sannhetstabell.

$((p$	$\oplus$	$q)$	$\rightarrow$	$r)$	$\vee$	$(\neg$	p	$\wedge$	$q)$
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1	0	1

Altså er $((p \oplus q) \rightarrow r) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee r$.

2 La P være mengden av skilt som tillfredsstiller p etc. Vi har da at antall skilt som tilfredsstiller P er $|P| = C(6,2) = 15$. Når to blanke ruter ar valgt har vi fire plasser igjen hvor vi skal plassere bokstaver. Det at minst to skal være like betyr at vi kan ha enten et par, 2 par, tre like eller 4 like. Dette gir oss $6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 3 + 4 = 232$, eller om man vil $4^4 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, muligheter. Dette antallet er uavhengig av hvor vi plasserte de to blanke, altså er $|P \cap Q| = 15 \cdot 232$.
Har vi plassert to blanke i siste kolonne og to A'er i første rad er det 2 ruter igjen å plassere bokstaver eller blanke. Vi ser derfor at $|R \cap S| = 5^2$. Egenskapene p og q blir også oppfylt dersom vi i de to siste rutene velger bokstever og ikke blanke, altså er $|P \cap Q \cap R \cap S| = 4^2$. Fra inklusjon-eksklusjonsprinsippet får vi $|(P \cap Q) \cup (R \cap S)| = 15 \cdot 232 + 5^2 - 4^2 = 3489$.

3 **a)** Ligningen $7x + 5 \equiv 22 - 2x \pmod{119}$ er ekvivalent med $9x \equiv 17 \pmod{119}$.

Euklids algoritme med tilbakesubstitusjon gir at

$1 = 53 \cdot 9 - 4 \cdot 119$.

Multipliserer vi med 53 på begge sider får vi

$x \equiv 68 \pmod{119}$, eller

$x = 68 + k \cdot 119$ for alle $k \in \mathbb{Z}$.

b) Standardmetoden for å løse denne typen oppgaver er som følger. Som i punkt a) kan vi bruke Euklids algoritme med tilbakesubstitusjon til å løse ligningene

$x_1 \equiv 5a + 1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 91)$

$x_2 \equiv 7b + 1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 65)$

$x_3 \equiv 13c + 1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 35)$

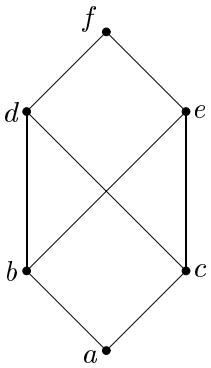
Vi finner da f.eks. $a = 18$, $b = 37$ og $c = 8$, og dette gir oss $x_1 = 91$, $x_2 = 260$ og $x_3 = 105$. Tilslutt får vi $x \equiv 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 11 \cdot x_3 \equiv 2728 \,(\mathrm{mod}\, 455)$. Mulige løsninger er $x = 453$ og $x = 908$.

En alternativ måte å løse kongruensene på er å observere at $x = -2$ er en løsning, altså er $455 - 2$ og $910 - 2$ de mulige løsningene mellom 200 og 1000.

c) Vi har at $63632 = 126 \cdot 505 + 2$. Altså har vi ifølge Fermats lille teorem at

$x = 122^{63632} \mathbf{mod} 127 = 122^2 \mathbf{mod} 127 = (-5)^2 \mathbf{mod} 127 = 25.$

4 **a)** Den rettede grafen og matriserepresentasjonene. (Alle pilene i grafen er rettet oppover.)



$$R_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) For at en relasjon skal være en delvisordning må den være *refleksiv*, *antisymmetrisk* og *transitiv*.

Refleksivitet betyr $\forall x R(x, x)$.

Antisymmetri betyr $\forall x \forall y((R(x, y) \wedge R(y, x)) \rightarrow x = y)$.

Transitivitet betyr $\forall x \forall y \forall z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$.

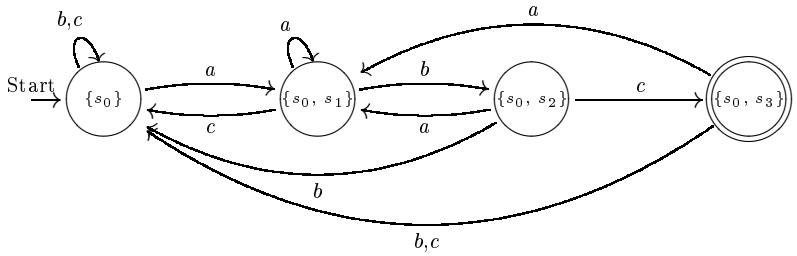
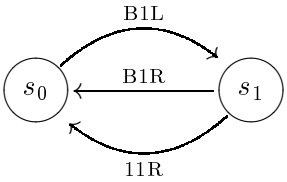
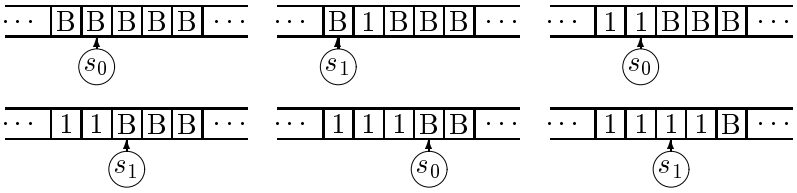
Det er bare relasjonen V som er en delvisordning.

5 **a)** Et mulig regulært uttrykk er f.eks. $R = (a \cup b \cup c)^* abc$.

b) En deterministisk endelig automat N som er slik at $L = \mathrm{L}(N)$ er gitt av tabellen under.

	a	b	c	F
$\{s_0\}$	$\{s_0, s_1\}$	$\{s_0\}$	$\{s_0\}$	
$\{s_1\}$	$\emptyset$	$\{s_2\}$	$\emptyset$	
$\{s_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{s_3\}$	
$\{s_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$*$
$\{s_0, s_1\}$	$\{s_0, s_1\}$	$\{s_0, s_2\}$	$\{s_0\}$	
$\{s_0, s_2\}$	$\{s_0, s_1\}$	$\{s_0\}$	$\{s_0, s_3\}$	
$\{s_0, s_3\}$	$\{s_0, s_1\}$	$\{s_0\}$	$\{s_0\}$	$*$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	

Her er grafen til en deterministisk endelig automat N' som gjenkjenner språket $L = \mathrm{L}(M)$. Vi har droppet alle overflødige tilstander, samt den universelt tiltrekkende tilstanden $\emptyset$.



6 Her er en grafisk representasjon av maskinen, og kjøringen på et blankt bånd.