

Fasit til Øving 2

1.4.20

Før tabellene

A:

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

B:

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

C:

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	e

Gruppe B & C er isomorfe. En mulig isomorfi $\varphi: B \rightarrow C$ er gitt ved

$$\varphi(e) = e$$

$$\varphi(a) = b$$

$$\varphi(b) = a$$

$$\varphi(c) = c$$

Det eksisterer ingen isomorfi $\psi: A \rightarrow B$:

Anta at $\psi(x) = b$, og at ψ er en isomorfi.

$$e = \psi(e) = \psi(x * x) = \psi(x) * \psi(x) = b * b = a$$

en selvmodsigelse.

a) Alle grupper med 4 elementer er isomorfe til enten A eller B. Både A & B er kommutative, derfor er alle grupper med 4 elementer kommutative.

b) Vi har en isomorfi $\varphi': B \rightarrow U_4$

gitt ved $\varphi'(e) = 1$

$$\varphi'(a) = -1$$

$$\varphi'(b) = i$$

$$\varphi'(c) = -i$$

(dermed er også C isomorf med U_4 , siden $C \cong B \cong U_4$).

c) La $n=2$ i oppgave 14. Da får vi gruppa

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ser at $\varphi'': A \rightarrow G$ gitt ved

$$\varphi''(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi''(a) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi''(b) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi''(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

gir en isomorfi.

1.4.34

G har et endelig antall elementer, så
la $|G| = m \in \mathbb{Z}^+$

Siden mengden $\{e, a, a^2, \dots, a^m\}$ har
 $m+1$ elementer, & alle disse elementene
ligger i G , har vi at $a^i = a^j$ for $i \neq j$.

Vi kan da anta at $i < j$.

$$a^i = a^j$$

$$a^i * a^i = a^i * a^j$$

$$e = a^{j-i} \quad \text{hvor } 0 < j-i \leq m$$

Ved å la $n = j-i$ har vi løst oppgaven.

1.5.4

Vi må sjekke de tre punktene i Theorem 5.14:

1) La $a, b \in i\mathbb{R}$. Da er $a = ia'$ og
 $b = ib'$, hvor $a', b' \in \mathbb{R}$.
 $a+b = ia' + ib' = i(a'+b') \in i\mathbb{R}$

2) $0 \in i\mathbb{R}$ per definisjon

3) La $a \in i\mathbb{R}$. Da er $a = ia'$, hvor
 $a' \in \mathbb{R}$. Ser at
 $a + i(-a') = ia' + i(-a') = 0,$
og $i(-a') \in i\mathbb{R}$.

Dette viser at $i\mathbb{R}$ er en undergruppe
av $\mathbb{C}$.

5.12

Må sjekke de tre punktene i Thm. 5.14.

1) La $\det X = \pm 1 = \det Y$

Da er $\det XY = \det X \cdot \det Y = \pm 1$

så undergruppa er lukket under multiplikasjon.

2) $\det I = 1$

3) Siden $\det X = \pm 1$, så har X en invers.

$$1 = \det I = \det (X \cdot X^{-1}) = \det X \cdot \det X^{-1}$$

$$\Rightarrow \det X^{-1} = \pm 1$$

så inversen til X er med i undergruppa.

Dette gir oss at matrisene med determinant ± 1 er en undergruppe av $GL(n, \mathbb{R})$.

5.18

$$\text{La } H = \{ f \in \tilde{\mathbb{F}} \mid f(0) = -1 \}$$

a) Nei, siden vi for alle $f \in H$ har

$$f - f = 0 \notin H.$$

b) Nei, siden vi for alle $f \in H$ har

$$f^2(0) = 1, \text{ altså vil } f^2 \notin H.$$

5.26

G_1 er generert av $\{-1, 1\}$

G_2 er ikke syklisk: Anta at a er en generator. Da er $\frac{a}{2} \notin \langle a \rangle$, en selvmotsigelse.

G_3 er ikke syklisk: Anta at $a \neq 2$ er en generator. Da er $\frac{a}{2} \notin \langle a \rangle$, en selvmotsigelse. (2 er heller ingen generator, siden $\frac{1}{3} \notin \langle 2 \rangle$)

G_4 er generert av $\{-6, 6\}$

G_5 er generert av $\{\frac{1}{6}, 6\}$

G_6 er ikke syklisk, siden G_6 er

2-dimensjonal over $\mathbb{Z}$.

1.5.45.

Anta at $H \leq G$, og la $a, b \in H$
Siden H er en undergruppe av G , så er
 $b^{-1} \in H$, og siden H er lukket under
operasjon, så er $ab^{-1} \in H$

Ser dermed at

$$H \leq G \Rightarrow ab^{-1} \in H \quad \forall a, b \in H$$

Trenger nå den andre implikasjonen.

Anta $ab^{-1} \in H \quad \forall a, b \in H$.

La $a \in H$, da er $aa^{-1} \in H \Rightarrow e \in H$

La $a \in H$. Siden $e \in H$, så er $ea^{-1} = a^{-1} \in H$.

La $a, b \in H$. Da er $b^{-1} \in H$, så
 $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$.

Ser dermed at $H \leq G$, og vi kan
konkludere at

$$H \leq G \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \quad \forall a, b \in H$$

1.5.51

$$H_a = \{x \in G \mid xa = ax\}$$

Ønsker å vise at $H_a \leq G$.

La $x, y \in H_a$. Da er $(xy)a = x(ya) = x(ay)$
 $= (xa)y = (ax)y = a(xy)$
 $\Rightarrow xy \in H_a$

Siden $ea = ae$, så er $e \in H_a$

La $x \in H_a$. Da er $xa = ax$

$$x^{-1}xa x^{-1} = x^{-1}ax x^{-1}$$

$$ax^{-1} = x^{-1}a$$

$$\Rightarrow x^{-1} \in H_a.$$

Ser dermed at $H_a \leq G$.