

Øving 4

2.9.6

$$\mathcal{O}_{0,\sigma} = \{ \dots -3, 0, 3, 6, \dots \}$$

$$\mathcal{O}_{1,\sigma} = \{ \dots -5, -2, 1, 4, 7, \dots \}$$

$$\mathcal{O}_{2,\sigma} = \{ \dots -4, -1, 2, 5, 8, \dots \}$$

Ser at siden alle element i $\mathbb{Z}$ er i disse tre ulike orbitene, vil dette være alle orbitene til σ .

2.9.12

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (1, 3, 4, 7, 8, 6, 5, 2)$$

$$= (1, 2) (1, 5) (1, 6) (1, 8) (1, 7) (1, 4) (1, 3)$$

2.9.29

Anta at $\exists \tau \in H$, τ odd.

La $A \subset H$ være alle like permutasjoner

& $B \subset H$ alle odde. Da har vi en

funksjon $\lambda_\tau: A \rightarrow B$ gitt ved

$$\lambda_\tau(\sigma) = \sigma\tau$$

λ_τ er 1-1: La $\lambda_\tau(\sigma) = \lambda_\tau(\sigma')$

$$\sigma\tau = \sigma'\tau$$

λ_τ er på: La $\sigma = \sigma'$ $\sigma \in B$. Da er $\sigma\tau \in A$,

$$\text{og } \lambda_\tau(\sigma\tau) = \sigma\tau\tau = \sigma$$

$\Rightarrow \lambda_\tau$ er en isomorfi fra A til B ,
derfor er $|A| = |B|$.

Hvis det ikke eksisterer noen odde permutasjoner
i H er alle like.

2.10.4

$$\langle 4 \rangle = \{4, 8, 0\}$$

$$1 + \langle 4 \rangle = \{1, 5, 9\}$$

$$2 + \langle 4 \rangle = \{2, 6, 10\}$$

$$3 + \langle 4 \rangle = \{3, 7, 11\}$$

Ser at siden $\mathbb{Z}_{12}$ er abelsk, så er dette alle cosetene til $\langle 4 \rangle$ i $\mathbb{Z}_{12}$.

2.10.6

$$H = \{g_0, \mu_2\}$$

$$g_1 H = \{g_1, \delta_2\}$$

$$g_2 H = \{g_2, \mu_1\}$$

$$g_3 H = \{g_3, \delta_1\}$$

$$\mu_1 H = \{\mu_1, g_2\} = g_2 H$$

$$\delta_1 H = \{\delta_1, g_3\} = g_3 H$$

$$\delta_2 H = \{\delta_2, g_1\} = g_1 H$$

Ser at de venstre cosetene er

$$g_1 H, g_2 H \& g_3 H.$$

2.10.28

La $gh \in gH$. Da er $ghg^{-1} \in H$,
så $ghg^{-1} = h'$ for en $h' \in H$
Det gir $gh = h'g$, så $gh \in Hg$
 $\Rightarrow gH \subseteq Hg$

La $hg \in Hg$. Da er $g^{-1}hg \in H$
 $\Rightarrow g^{-1}hg = h'$
 $hg = gh'$
 $\Rightarrow hg \in gH \Rightarrow Hg \subseteq gH$
 $\Rightarrow Hg = gH$ g.e.d.

2.10.29

La $g \in G$ & $h \in H$.

Veit per antagelse at

$Hg = gH$
 $\Rightarrow hg = gh'$ for en $h' \in H$
 $\Rightarrow g^{-1}hg = h'$
 $\Rightarrow g^{-1}hg \in H$ g.e.d.

2.10.40

La $|K a| = r$. Da vil $a^r = e$.

Fra theorem 10.10 vet vi at $r \mid n$,

d.v.s. $n = kr$, hvor $k \in \mathbb{N}$. Derfor er

$$a^n = a^{kr} = (a^r)^k = e^k = e. \quad \text{q.e.d.}$$

2.9.36

$$a \in G$$

$\lambda_a: G \rightarrow G$ er gitt ved $\lambda_a(g) = ag$

λ_a er 1-1:

$$\text{Anta } \lambda_a(g) = \lambda_a(g')$$

$$\text{da er } ag = ag' \quad \exists a^{-1} \in G \text{ siden } G$$

er en gruppe, så $g = g'$.

λ_a er på: La $g \in G$

$$\text{Da er } \lambda_a(a^{-1}g) = aa^{-1}g = g$$

$\Rightarrow \lambda_a$ er 1-1 & på, så den er en
permutasjon q.e.d.