

Øving 5

10.30

Se på gruppen S_3 og undergruppen $H = \{g_0, \mu_1\}$

Da er

$$\mu_2 H = \{\mu_2, g_2\} = \{g_2, \mu_2\} = g_2 H$$

men

$$H\mu_2 = \{\mu_2, g_1\}$$

$$Hg_2 = \{g_2, \mu_3\}$$

10.32

Anta at $aH = bH$.

$$Ha^{-1} \subseteq Hb^{-1}:$$

$$\text{Gi } h \quad ha^{-1} \in Ha^{-1}$$

$$ha^{-1} = (ah^{-1})^{-1}$$

$h^{-1} \in H$, siden H er en undergruppe, så
 $ah^{-1} \in aH \Rightarrow ah^{-1} = bh'$ for $h' \in H$

$$\Rightarrow ha^{-1} = (ah^{-1})^{-1} = (bh')^{-1} = h'^{-1}b^{-1} \in Hb^{-1}$$

siden $h'^{-1} \in H$.

$$Hb^{-1} \subseteq Ha^{-1}: \text{Dualt.}$$

$$\Rightarrow Hb^{-1} = Ha^{-1} \quad \text{q.e.d.}$$

10.35

La $\varphi: \{\text{venstre restklasser}\} \rightarrow \{\text{højre restklasser}\}$
være gitt ved $\varphi(aH) = Ha^{-1}$

φ er 1-1:

$$\varphi(aH) = \varphi(bH)$$

$$Ha^{-1} = Hb^{-1}$$

$$\text{Opg. 10.32} \Rightarrow aH = bH$$

φ er på:

Gitt Ha . Siden $a \in G \exists a^{-1} \in G$

$$\text{slik at } \varphi(a^{-1}H) = Ha^{-1}a^{-1} = Ha$$

$\Rightarrow$ Det er like mang venstre som høyre
restklasser til en under gruppe H av
en gruppe G .

2.11.22

$|G|=16$. Bruker Theorem 11.12 til å finne alle abelske grupper med orden 16 (opp til isomorfi).

$$\{ \mathbb{Z}_{16}, \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \underline{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2} \}$$

11.39

La G være en abelsk gruppe.

$$H = \{ g \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}^+ \text{ slik at } g^n = e \}$$

$H \leq G$:

i) Gitt $a, b \in H$, dvs. $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}^+$ s.a. $a^{n_1} = e = b^{n_2}$.

$$\begin{aligned} \text{Da er } (ab)^{n_1 n_2} &= a^{n_1 n_2} b^{n_1 n_2} \\ &= (a^{n_1})^{n_2} (b^{n_2})^{n_1} = e^{n_2} e^{n_1} = e \\ \Rightarrow ab &\in H. \end{aligned}$$

ii) $e^n = e \quad \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow e \in H$

iii) Gitt $a \in H$, dvs. $\exists n \in \mathbb{N}^+$ s.a. $a^n = e$.

$$\begin{aligned} \text{Da er } (a^{-1})^n &= (a^n)^{-1} = e^{-1} = e \\ \Rightarrow a^{-1} &\in H. \end{aligned}$$

11.47

G abelsk gruppe.

$$H = \{g \in G \mid g^2 = e\}$$

$H \leq G$:

i) La $a, b \in H$. Da er $(ab)^2 = a^2 b^2 = e \cdot e = e$,
så $ab \in H$.

ii) $e^2 = e$, så $e \in H$

iii) $a \in H \Rightarrow (a^{-1})^2 = (a^2)^{-1} = e^{-1} = e$
 $\Rightarrow a^{-1} \in H$.

Siden H er settet med alle elementer av orden 2 og e (det eneste elementet av orden 1 er e), har vi vist påstanden.

11.49

La $G = S_3$. Elementene av orden 2 er

$H = \{g_0, \mu_1, \mu_2, \mu_2\}$. Men $\mu_1 \mu_2 = g_2$, så
 H er ikke lukket, altså ingen undergruppe av S_3 .

Oppgave: Hvor bryter beviset i 11.47 sammen når G ikke er abelsk?

13.2:

$$\varphi(0,6) + \varphi(0,6) = 0 + 0 = 0$$

$$\varphi(0,6 + 0,6) = \varphi(1,2) = 1$$

$\Rightarrow \varphi$ er ingen homomorfi.

13.6

$$\varphi(a+b) = 2^{a+b} = 2^a 2^b = \varphi(a) \varphi(b)$$

$\Rightarrow \varphi$ er en homomorfi

13.8

Nei, ikke hvis gruppa ikke er abelsk.

Eksempel: $G = S_3$

$$\varphi(\mu_1, \mu_2) = \varphi(g_1) = g_2$$

$$\varphi(\mu_1) \varphi(\mu_2) = \mu_1 \mu_2 = g_1$$

Oppgave: Hvis at det er en homomorfi dersom G er abelsk.

13.44

$$\phi[G] = \{g' \in G' \mid \exists g \in G \text{ s.t. } \phi(g) = g'\}$$

$$\Rightarrow |\phi[G]| \leq |G|$$

$\Rightarrow$ Hvis G er endelig, så må $\phi[G]$ være endelig.

Fra theorem 13.15 ser vi at

$$|\phi[G]| = (G : \ker \phi) = \frac{|G|}{|\ker \phi|}$$

$$\Rightarrow \frac{|G|}{|\phi[G]|} = |\ker \phi|$$

så $|\phi[G]|$ deler $|G|$.

13.45

Fra theorem 13.12 veit vi at $\phi[G] \leq G'$

$\Rightarrow |\phi[G]| \leq |G'|$, så hvis G' er endelig må $\phi[G]$ også være det.

Fra Theorem 10.10 veit vi at $|\phi[G]|$ er en divisor av $|G'|$.