EKSAMEN I MNFMA205/SIF5021, 5. DES.2000-LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1. (a) I følge Strukturteoremet for abelske grupper er alle abelske grupper av orden 16 opp til isomorfi:

$$\mathbb{Z}_{16},\ \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \text{ og } \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

(b) Det er gitt i teksten at $G = \{1 \leq a < 40 \mid \gcd(a, 40) = 1\}$ under multiplikasjon modulo 40 er en gruppe. La oss først finne elementene i G.

$$G = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39\}$$

Merk at multiplikasjon modulo 40 er kommutativ operasjon generelt, så den er kommutativ på G også. Følgelig er G en abelsk gruppe med 16 elementer og dermed isomorf med en av gruppene fra (a). Hvilken? To isomorfe grupper har samme antall elementer av enhver orden, så la oss se på orden til elementene i G.
-1 er identitets element og har orden 1
-3 har orden 4
-7 har orden 4
-9 har orden 2
osv.
Etter en del regning kommer vi til at det er 8 elementer av orden 4, 7 elementer av orden 2 og ett element (identitet) av orden 1 i gruppen G.

La oss se på gruppene i (a).
-$\mathbb{Z}_{16}$ er syklisk og har dermed et element av orden 16; et slikt element har vi ikke i G, så det kan ikke være $\mathbb{Z}_{16}$.
-$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ har minst et element av orden 8, det har ikke G, så det er heller ikke $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ som G er isomorf med.
-I $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ er det ingen elementer av orden 4, det er det i G, så det er heller ikke $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ som G er isomorf med.
-$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ her 14 elementer av orden 4 og så mange elementer av orden 4 har vi ikke i G, dermed kan det ikke være $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ heller.
-Vi står igjen med $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ og kan nå si at G er isomorf med den siden vi har utelukket alle de andre gruppene. Sjekker vi orden til elementene i $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ser vi at de stemmer overens med orden til elementene i G: 8 elementer av orden 4, 7 av orden 2 og ett av orden 1.

Oppgave 2. (a) Vi skal vise at $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{Z} \right\}$ er en abelsk gruppe under vanlig matrisemultiplikasjon.

Først må vi sjekke om H er lukket under denne operasjon.
Gitt $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

som er med i H siden $a + b \in \mathbb{Z}$ når $a, b \in \mathbb{Z}$ og dermed er H lukket under vanlig matrisemultiplikasjon. La oss nå sjekke om gruppeaksiomene er oppfylt.
$\mathcal{G}_1$: Operasjonen er assosiativ: vanlig matrisemultiplikasjon er assosiativ generelt, så den er assosiativ på H også.
$\mathcal{G}_2$: Identitets element: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ er med i H og

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

for alle $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, så $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ er identitets element.

$\mathcal{G}_3$: Eksistensen av et invers element i H for hvert element i H: Gitt $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$. Da er $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ også med i H ($-a \in \mathbb{Z}$, når $a \in \mathbb{Z}$) og

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Altså, hvert element $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i H har et inverst element, nemlig $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, i H.
Til slutt må vi sjekke om vanlig multiplikasjon av matriser er kommutativ på H. La $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ være to elementer fra H.

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operasjonen er altså kommutativ og dermed har vi vist at H er en abelsk gruppe under vanlig matrisemultiplikasjon.
(b) Vi skal vise at H er isomorf med $(\mathbb{Z}, +)$. Vi må definere en gruppe homomorfi f fra H til $\mathbb{Z}$ som er både 1-1 og på (isomorfi). Altså, vi trenger en $f : H \to \mathbb{Z}$ slik at $f(AB) = f(A) + f(B)$ for alle $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ (f gruppe homomorfi). Hvis vi ser på vår beregning av produktet AB i (a), merker vi med en gang at dette kravet kommer til å være oppfylt hvis vi definerer f ved at $f(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = a$. Altså f definert på denne måten er en gruppe homomorfi. Det gjenstår å sjekke om f er 1-1 og på.
f 1-1: Anta at $f(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 0$ (identitets element i $(\mathbb{Z}, +)$). I følge vår definisjon av f kan dette være oppfylt hvis og bare hvis $a = 0$ og dermed er I, identitets element i H, eneste element i Ker$f$ og f er følgelig 1-1. (HUSK: Gruppe homomorfi $g : G_1 \to G_2$ er 1-1 hvis og bare hvis Ker$g = \{e_{G_1}\}$)
f på: Gitt $x \in \mathbb{Z}$. Da er $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ med i H og $f(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = x$. f er dermed på og vi har vist at H er isomorf med $(\mathbb{Z}, +)$.
(c) Vi skal finne orden til elementene $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, MN, NM \in G$, der G er gruppen av 2×2-matriser i Z med detereminanten lik 1 under vanlig matrisemultiplikasjon.

Orden til M er, etter definisjonen, minste r slik at $M^r = I$, der I er identitetsmatrisa (identitets element i G). Litt regning gir at orden til M er 4 og at orden til N er 3.

$$MN = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og etter å ha tatt noen potenser av MN ser vi at

$$(MN)^r = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og orden til MN er dermed uendelig (ingen r er slik at $(MN)^r = I$).

Tilsvarende,

$$NM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ og } (\mathrm{NM})^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r & 1 \end{pmatrix}$$

og orden til NM er også uendelig.
(d) Det er gitt at H er en undergruppe av G. For at H skal være normal, må $ghg^{-1} \in H$ for alle $h \in H, g \in G$. La $h = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ og $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$.

Da er $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ og

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc-acx & a^2x \\ -c^2x & ad-bc+acx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-acx & a^2x \\ -c^2x & 1+acx \end{pmatrix}$$

siste steg siden $ad - bc = 1$ da $g \in G$.

Nå ser vi at hvis vi velger for eksempel $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ og $g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G$, så er $ghg^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \notin H$ og dermed er H ikke en normal undergruppe av G.

EKSAMEN I MNFMA205/SIF5021, 19. MAI 1999-LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 2. (a) Vi skal vise at H^* er en gruppe under matrisemultiplikasjon. Først må vi sjekke om H^* er lukket under denne operasjonen: Gitt $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ -\bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \in H^*$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ -\bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - b\bar{b}' & ab' + b\bar{a}' \\ -\bar{b}a' - \bar{a}\bar{b}' & \bar{a}\bar{a}' - b'\bar{b} \end{pmatrix}$$

som er med i H^* siden $aa' - b\bar{b}', ab' + b\bar{a}' \in \mathbb{C}$ da $a, b \in C$ og $-\bar{b}a' - \bar{a}\bar{b}'$ er den negative av den komplekskonjugerte av $ab' + b\bar{a}'$ og $\bar{a}\bar{a}' - b'\bar{b}$ er den komplekskonjugerte av $aa' - b\bar{b}'$. Matrisemultiplikasjon er altså lukket på H^*.

La oss nå sjekke gruppeaksiomene.

$\mathcal{G}_1$: Matrisemultiplikasjon er en assosiativ operasjon generelt, så den er assosiativ på H^* også.

$\mathcal{G}_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ er med i H^* (1 og 0 er komlekse tall og $\bar{0} = 0$, $\bar{1} = 1$) og

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

for hvert element $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in H^*$. Dermed er $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et identitets element.

$\mathcal{G}_3$: Gitt $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in H^*$. Da er $\begin{pmatrix} \frac{\bar{a}}{a\bar{a}+b\bar{b}} & \frac{-b}{a\bar{a}+b\bar{b}} \\ \frac{\bar{b}}{a\bar{a}+b\bar{b}} & \frac{a}{a\bar{a}+b\bar{b}} \end{pmatrix}$ med i H^* siden

- $a\bar{a} + b\bar{b}$ er et reelt tall forskjellig fra 0 da det følger fra definisjonen av H^* at a og b ikke kan begge være lik 0
- $\frac{\bar{a}}{a\bar{a}+b\bar{b}}$ og $\frac{-b}{a\bar{a}+b\bar{b}}$ er komplekse tall og
- $\frac{a}{a\bar{a}+b\bar{b}}$ er den komplekskonjugerte av $\frac{\bar{a}}{a\bar{a}+b\bar{b}}$ og $\frac{\bar{b}}{a\bar{a}+b\bar{b}}$ er den negative av den komplekskonjugerte av $\frac{-b}{a\bar{a}+b\bar{b}}$.

Videre er

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\bar{a}}{a\bar{a}+b\bar{b}} & \frac{-b}{a\bar{a}+b\bar{b}} \\ \frac{\bar{b}}{a\bar{a}+b\bar{b}} & \frac{a}{a\bar{a}+b\bar{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{a}}{a\bar{a}+b\bar{b}} & \frac{-b}{a\bar{a}+b\bar{b}} \\ \frac{\bar{b}}{a\bar{a}+b\bar{b}} & \frac{a}{a\bar{a}+b\bar{b}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Altså, for hvert element i H^* finnes det invers i H^*.

Vi har dermed vist at H^* er en gruppe under matrisemultiplikasjon.

(b) Vi skal finne undergruppen G av H^* generert av $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. En undergruppe generert av A og B er per definisjon minste undergruppe som inneholder A og B. G må altså inneholde identitets element I (undergruppe!), A, B og alle mulige produkt av A og B (en undergruppe må være lukket!). Spesielt, må G inneholde alle potenser av A og B, så la oss begynne med å se på dem.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \; B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \; B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Altså, så lenge har vi funnet 6 elementer i G: I, A, A^2, A^3, B og B^3.

$AB = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ og $AB^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ må vi også ha i G. Det er gitt at G har 8 elementer og vi trenger dermed ikke å lete etter flere elementer. Elementene i G er:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Er G isomorf med D_4? Også her er det enklest å se på orden til elementer først. Hvis orden til elementene i de to gruppene ikke skulle stemme overens, da kan vi si at de ikke er isomorfe.

Etter litt regning finner vi ut at alle elementene i G bortsett fra I og A^2 har orden 4. I D_4 er det bare to elementer av orden 4. Dermed kan G ikke være isomorf med D_4.

8. desember 1995

Opg 2

a) $\sigma = (1,3,4)(2,6)(5,8,7)$
$\underline{\underline{= (1,4)(1,3)(2,6)(5,7)(5,8)}}$

b) Banene til σ er $\{1,3,4\}$, $\{2,6\}$ og $\{5,7,8\}$

c) Siden σ har en bane $\{1,2,3\}$, må den ha en sykel av lengde tre. Hvis vi skriver σ som et produkt av disjunkte sykler, må altså en av disse være en permutasjon av $\{1,2,3\}$. Ordenen til σ er minste felles produkt av lengdene til de disjunkte syklene, så ordenen må derfor være delelig med 3.

2. desember 1992

Opg 1

a) G er en gruppe:

Hvis $x, y \in G$, så er x & y heltall, & dermed er $x+(-1)^x y$ et heltall, når vi deretter bruker mod 6 ser vi at $x * y \in G$.

i) G er assosiativ (oppgitt)

ii) 0 er identitet:

$$x * 0 = x + (-1)^x \cdot 0 = x$$
$$0 * x = 0 + (-1)^0 x = x$$

iii) den inverse til x er $(-1)^{x+1} x$

$$x * (-1)^{x+1} x = x + (-1)^x (-1)^{x+1} x = x - x = 0$$
$$(-1)^{x+1} x * x = (-1)^{x+1} x + (-1)^x x = (-1)^x x(-1+1) = 0$$

b) 2 & 4 har orden 3

1, 3, 5 har orden 2

I S_3 har ρ_1 & ρ_2 orden 3, mens μ_1, μ_2 & μ_3 har orden 2.

*	0	2	4	1	5	3
0	0	2	4	1	5	3
2	2	4	0	3	1	5
4	4	0	2	5	3	1
1	1	5	3	0	2	4
5	5	3	1	4	0	2
3	3	1	5	2	4	0

Vi ser at ved å la $\phi : G \longrightarrow S_3$ være gitt ved

$\phi(0) = \rho_0 \quad \phi(2) = \rho_1 \quad \phi(4) = \rho_2$

$\phi(1) = \mu_1 \quad \phi(5) = \mu_2 \quad \phi(3) = \mu_3$

Så får vi en isomorfi.

Opg 2

a) $G = \{(1,2)(1,2) \, , \, (1,6)(2,5)(3,8)(4,7), \, (1,8)(2,7)(3,6)(4,5),$
$(1,3)(2,4)(5,7)(6,8)\} = \{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$

Ser at $\mu_i^2 = \mu_0$ for $i = 1,2,3$, så $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

b) $G1 = \{1, 3, 6, 8\}$

c) La X være de forskjellige fargeleggingene. Da er $|X| = 4^8$.

For at en fargelegging skal være lik under μ_1, må 1 være lik 6, 2 lik 5, 3 lik 8 & 4 lik 7. Vi får da 4 perler vi kan farge fritt, & resten følger av disse. Derfor har vi at

$$|X_{\mu_1}| = 4^4$$

Symetri gir $|X_{\mu_2}| = |X_{\mu_3}| = 4^4$

Det er opplagt at $|X_{\mu_0}| = 4^8$, så vi får

$$r = \frac{\sum_{g \in G} |X_g|}{|G|} = \frac{3 \cdot 4^4 + 4^8}{4} = \underline{\underline{4^3(3 + 4^4)}}$$

Opg 3

a) $\langle (p,p) \rangle = \{ (0,0), (p,p), (2p,0), (3p,p), \dots ((p-1)p, 0),$
$(0,p), (p,0), \dots ((p-1)p, p) \}$

Ser at $|\langle (p,p) \rangle| = 2p$

$|\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{2p}| = 2p^3$

Dermed må $|G| = \frac{2p^3}{2p} = \underline{\underline{p^2}}$

b) Ser at $(i,i) \notin \langle (p,p) \rangle$ for $i < p$, mens (p,p) opplagt er med i $\langle (p,p) \rangle$, derfor vil ordenen til $(1,1) + \langle (p,p) \rangle$ i G være p.

Opg 4

a) Fra theorem 14.13 i) ser vi at hvis $gzg^{-1} \in Z(G)$ for $g \in G$ og $z \in Z(G)$, så er $Z(G)$ normal. Men siden $gz = zg$ fra definisjonen av $Z(G)$, så er $gzg^{-1} = zgg^{-1} = ze = z$ som opplagt er med i $Z(G)$, og dermed er $Z(G)$ en normal undergruppe av G.

b) Skal vise at $\operatorname{In} G$ er en undergruppe av $\operatorname{Aut}(G)$

i) La $i_g, i_{g'} \in \operatorname{In} G$

$i_g \circ i_{g'}(x) = i_g(i_{g'}(x)) = i_g(g'xg'^{-1}) = g(g'xg'^{-1})g^{-1}$
$= (gg')x(gg')^{-1} = i_{gg'}(x)$

så $\operatorname{In} G$ er lukka under binær operasjonen i $\operatorname{Aut}(G)$.

2) $i_e = exe^{-1} = x$ er identiteten i $Aut(G)$

3) La $i_g \in InG$

$$i_g i_{g^{-1}} = gg^{-1} x gg^{-1} = gg^{-1} x (gg^{-1})^{-1} = exe^{-1} = i_e$$

$$i_{g^{-1}} i_g = g^{-1}g x g^{-1}g = exe = i_e$$

Så i_g har invers i InG, nemlig $i_{g^{-1}}$.

Dette viser oss at InG er en under gruppe av $Aut(G)$.

c) Konstruer en avbilding $\phi : G \to InG$ ved å la $\phi(g) = i_g$. Det er lett å vise at dette er en på gruppe-homomorfi.

Ser at $\ker \phi = \{g \mid i_g = i_e\} = \{g \mid gxg^{-1} = x \; \forall x \in G\}$
$= \{g \mid gx = xg \; \forall x \in G\} = Z(G)$

Bruker Theorem 14.11, og får at

$$G/Z(G) \simeq InG \qquad \text{q.e.d.}$$

d) Ved inspeksjon av tabellen ser vi at $Z(G) = \{\rho_0, \rho_2\}$

$In D_4 \simeq D_4/Z(G)$, derfor vil $|In D_4| = \frac{8}{2} = 4$.

Siden alle elementene på diagonalen i gruppe tabellen er i $Z(G)$, så vil alle elementene i $D/Z(G)$ ha orden 2, og dermed vil alle være sin egen invers.

$$\rho_1 \cdot \rho_3^{-1} = \rho_1 \rho_3 = \rho_0 \in Z(G) \Rightarrow \rho_1 + Z(G) = \rho_3 + Z(G)$$

$$\mu_1 \cdot \mu_2^{-1} = \mu_1 \mu_2 = \rho_2 \in Z(G) \Rightarrow \mu_1 + Z(G) = \mu_2 + Z(G)$$

$$\delta_1 \cdot \delta_2^{-1} = \delta_1 \delta_2 = \rho_2 \in Z(G) \Rightarrow \delta_1 + Z(G) = \delta_2 + Z(G)$$

Opplagt har vi at $\rho_0 + Z(G) = \rho_2 + Z(G) = Z(G)$

La oss kalle elementen i $D/Z(G)$ for

$\{e, \rho, \mu, \delta\}$, hvor $e = \rho_0 + Z(G)$

$\rho = \rho_1 + Z(G)$, $\mu = \mu_1 + Z(G)$ og $\delta = \delta_1 + Z(G)$

Vi får gruppe tabellen for $D/Z(G)$

$*$	e	ρ	μ	δ
e	e	ρ	μ	δ
ρ	ρ	e	δ	μ
μ	μ	δ	e	ρ
δ	δ	μ	ρ	e

Vi ser fra gruppe tabellen at $D/Z(G) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Det gir $\underline{\underline{\text{In } D_4 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}}$

2. desember 1991

Opg 1

a) $a = (1,7)(2,4,5)(3,8,6)$

b) Vi veit at ordenen til a er minste felles multiplum av orden til de disjunkte syklene.

altså $2 \cdot 3 = \underline{\underline{6}}$