Eksamen : MA2201 / TMA4150
Vår 2004

Opg 1

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \mu_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Her er ρ_i rotasjoner & μ_i speilinger.

b) $r = \dfrac{\sum_{g\in G} |X_g|}{|G|}$ er antall fargelegginger, hvor G er symetriene av kvadratet, X er de forskjellige fargeleggingene, & X er en G-mengde.

$$|X_{\rho_0}| = |X| = 3^4$$

$$|X_{\rho_1}| = |X_{\rho_3}| = 3$$

$$|X_{\rho_2}| = 3^2$$

$$|X_{\mu_1}| = |X_{\mu_2}| = 3^3$$

$$|X_{\mu_3}| = |X_{\mu_4}| = 3^2$$

$$r = \frac{3^4 + 2\cdot 3 + 3^2 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2}{8} = \underline{\underline{21}}$$

Opg 2

a) La $A, B \in H$. Da er $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 1 = 1$

$\Rightarrow AB \in H$

$\det I = 1 \Rightarrow I \in H$

La $A \in H$. Da er $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow A^{-1} \in H$

$\Rightarrow$ H er en <u>undergruppe av G</u>.

La $A \in H$ og $B \in G$. Da er

$$\det(BAB^{-1}) = \det B \cdot \det A \cdot \det B^{-1}$$
$$= \det B \det A \frac{1}{\det B} = \det A = 1$$

$\Rightarrow BAB^{-1} \in H$

$\Rightarrow$ H er en <u>normal undergruppe av G</u>

b) La $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^*$ være gitt ved

$\varphi(B) = \det B$. Ser at

$$\varphi(BC) = \det BC = \det B \cdot \det C = \varphi(B)\varphi(C)$$

$\Rightarrow \varphi$ er en gruppe homomorfi.

For $r \in \mathbb{R}^*$ ser vi at $\varphi\left(\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = r$

$\Rightarrow \varphi$ er på.

$$\ker \varphi = \{B \in G \mid \varphi(B) = 1\} = H$$

$\Rightarrow$ <u>$G/H \simeq \mathbb{R}^*$</u>

Opg 3

$|G| = 143$ $\quad H \lneq G$ $\quad 143 = 11 \cdot 13$

Da må $|H| = 11$ eller $|H| = 13$ siden $|H| \mid |G|$, og vi kan anta at $H \neq \{e\}$, for $\{e\}$ er syklisk

La $e \neq a \in H$. Da vil $\langle a \rangle$ være en undergruppe av H, så $|\langle a \rangle| \mid |H|$

Siden $\langle a \rangle \neq \{e\}$ må $|\langle a \rangle| = |H|$

$\Rightarrow \langle a \rangle = H$, & H er syklisk.

Opg 4

a) $\mathbb{Z}_8, \ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

b) Enheter i $\mathbb{Z}_{10}$: $\quad 3 \cdot 7 \equiv 1 \quad 9 \cdot 9 \equiv 1 \quad 1 \cdot 1 \equiv 1$

Enheter i $\mathbb{Z}_3$: $\quad 2 \cdot 2 \equiv 1 \quad 1 \cdot 1 \equiv 1$

$G = \{(1,1), (1,2), (3,1), (3,2), (7,1), (7,2), (9,1), (9,2)\}$

$|(1,1)| = 1$

$|(1,2)| = 2$

$|(3,1)| = 4$

$|(3,2)| = 4$

$|(7,1)| = 4$

$|(7,2)| = 4$

$|(9,1)| = 2$

$|(9,2)| = 2$

$\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

Opg5

a) $\sigma = (1\,3\,5)(2\,4)$
$= (1\,5)(1\,3)(2\,4)$

b) $|\sigma| = \mathrm{lcm}(3,2) = 6$

$12 = 3\cdot 4$, så $\mu = (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)$ har orden 12

$27 = 3^3$, så en trenger en sykel av lengde 27. Dette finnes ikke siden vi jobber i S_8.

Anta at σ er en sykel med orden 30. Siden $5|30$ må σ inneholde en disjunkt sykel σ_1 hvor $5||\sigma_1|$. Siden S_8 er permutasjoner av 8 elementer må $|\sigma_1|\leq 8$ $\Rightarrow |\sigma_1| = 5$. Siden $3|30$ & $3\nmid|\sigma_1|$ må σ inneholde en disjunkt sykel $\sigma_2 \neq \sigma_1$ hvor $3||\sigma_2|$. Siden S_8 har 8 elementer, σ_1 har 5 elementer og σ_1 og σ_2 er disjunkte må $|\sigma_2| \leq 3$. $\Rightarrow |\sigma_2| = 3$. Det er da ingen elementer igjen til å lage flere disjunkte sykler, så $\sigma = \sigma_1\sigma_2$. Men da er $|\sigma| = 5\cdot 3 = 15$, en selvmotsigelse. $\Rightarrow$ Det finnes ikke noe element med orden 30.

Opg6 (TMA 4150)

R kommutativ ring med 1.
La $(0)\neq I$ være et ideal i R.

Anta R er en kropp, & la $(0)\neq I$ være et ideal i R.
Fra definisjonen av et ideal er $ai\in I$ $\forall a\in R, i\in I$.
Siden $I\neq(0)$, så $\exists\, a\neq 0$ i I. Siden R er en kropp $\exists\, a^{-1}\in R$, og dermed er $a^{-1}a\in I \Rightarrow 1\in I$.
La $b\in R$. Da er $b\cdot 1 = b\in I \Rightarrow I = R$.

Anta at (0) & R er de eneste idealene i R.
Da er (0) et maksimalt ideal i R
$\Rightarrow R/(0) \cong R$ er en kropp.

Opg6 (MA2201)

La G være en gruppe med $|G| = 12 = 2^2 \cdot 3$

$r = \#$ Sylow 2-undergrupper
$s = \#$ Sylow 3-undergrupper

Vi veit at

$r \equiv 1 \mod 2$ & $r \mid 12$

$\Rightarrow$ $r = 1$ eller 3

$s \equiv 1 \mod 3$ & $s \mid 12$

$\Rightarrow$ $s = 1$ eller 4

Hvis $s=1$ eller $r=1$, & siden alle Sylow p-undergrupper er konjugerte av hverandre, vil vi da få en normal undergruppe av G, & G er dermed ikke simpel.

Anta derfor at $s=4$ & $r=3$

La H & K være to Sylow 3-undergrupper.

$|H \cap K| \mid 3 \Rightarrow |H \cap K| = 1$ når $H \neq K$

$\Rightarrow$ det finnes $4 \cdot 2 = 8$ elementer av orden 3.

La nå H & K være to Sylow-2-undergrupper, $H \neq K$.
Vi veit at $|H| = 4$, og K må ha minst et element som ikke er i H. Siden ingen av elementene i H eller K har orden 3, har vi da minst 5 elementer med orden ulik 3 og 8 elementer av orden 3. Dette gir 13 elementer, og siden $|G| = 12$ gir dette en selvmotsigelse.

Vi kan derfor ikke ha $r=3$ & $s=4$

$\Rightarrow$ enten $r=1$ eller $s=1$

$\Rightarrow$ G er ikke simpel.