Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Heidi Dahl
Telefon: 5 02 42

TMA4150 Algebra og tallteori

Torsdag 12. august 2004
Kl. 9-14

Hjelpemidler: Godkjent kalkulator HP30S.

Sensur: 1. september 2004

Oppgave 1

a) Finn alle abelske grupper med 16 elementer opp til isomorfi. Finn alle elementene u i $\mathbb{Z}_{16}$ slik at $\langle u \rangle = \mathbb{Z}_{16}$.

b) La G være gruppen av enheter i den kommutative ringen $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$. Forklar hvorfor G har 16 elementer, og avgjør hvilken av gruppene i (a) som G er isomorf med.

Oppgave 2

La n være et positivt helt tall, der $n \geq 2$.

a) Vis at gruppen S_n av permutasjoner av $\{1, \cdots, n\}$ har samme antall odde og like permutasjoner.

b) Skriv ned alle elementene i undergruppen A_4 (som består av alle like permutasjoner i S_4) og finn alle venstre og høyre restklasser til undergruppen $H = \langle (1\,2\,3) \rangle$ i A_4. Er H en normal undergruppe av A_4?

Oppgave 3

La G være gruppen av inverterbare 3×3-matriser over de reelle tall $\mathbb{R}$ med vanlig matrise-multiplikasjon.

a) La H være undermengden av G som består av de inverterbare matrisene som har determinant 1 eller -1. Vis at H er en undergruppe av G, og at denne undergruppen er normal.

b) Vis at faktorgruppen G/H er isomorf med den multiplikative gruppen $\mathbb{R}^+$ bestående av alle positive reelle tall.

c) La K være undermengden av G som består av alle inverterbare 3×3-matriser med determinant 2 eller -2. Er K en undergruppe av G?

Oppgave 4

La G være en gruppe, og H en undergruppe av G. Vis at mengden X av venstre restklasser til H i G er en G-mengde, der $g * (aH) = (ga)H$ når $g \in G$ og aH er en venstre restklasse.

Oppgave 5

a) La F være en kropp, og la $p(x)$ være et irredusibelt polynom i ringen $F[x]$. Vis at da er idalet $\langle p(x) \rangle$ et maksimalt ideal i $F[x]$.

b) Vis at $p(x) = x^4 + x + 1$ er irredusibelt i $\mathbb{Z}_2[x]$.

c) Konstruer en kropp med 16 elementer, og beskriv elementene i denne kroppen.

Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Carl Fredrik Berg   Telefon: 975 05 585

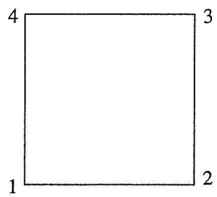
EKSAMEN I FAG MA2201 ALGEBRA

Bokmål
Fredag 28. mai 2004
Kl. 09.00 - 14.00
Sensur: 21. juni 2004

Hjelpemidler: HP30S kalkulator tillatt

Oppgave 1

La $G = \mathcal{D}_4$ være gruppen av symmetrier av et kvadrat



a) Skriv ned de 8 elementene i G som permutasjoner av $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) På hvor mange måter kan de 4 kantene i kvadratet ovenfor fargelegges når en kan bruke fargene gul, blå eller rød? (Her oppfattes to fargelegginger som like når de kan føres over i hverandre ved en av symmetriene til kvadratet.)

Oppgave 2

La G være gruppen av inverterbare 2×2-matriser over de relle tallene $\mathbb{R}$. La H være undermengden av G bestående av matrisene med determinant lik 1.

a) Vis at H er en undergruppe av G, og at denne undergruppen er normal.

b) Vis at faktorgruppen G/H er isomorf med den multiplikative gruppen $\mathbb{R}^*$, dvs. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ hvor gruppeoperasjonen er vanlig multiplikasjon.

Oppgave 3

La G være en gruppe med 143 elementer og $H \subset G$ en undergruppe der $H \neq G$. Forklar hvorfor H er en syklisk gruppe.

Oppgave 4

a) Finn alle abelske grupper av orden 8 opp til isomorfi.

b) La G være gruppen av enheter i den kommutative ringen $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3$. Finn alle elementene i G, og avgjør hvilken av gruppene i (a) som G er isomorf med.

Oppgave 5

La $\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 3\,4\,5\,2\,1\,6\,7\,8 \end{pmatrix}$ være et element i S_8.

a) Skriv σ som et produkt av disjunkte sykler og som et produkt av transposisjoner (dvs. sykler av lengde 2).

b) Hva er ordenen til σ? Finn et element i S_8 av orden 12.
Fins det noe element av orden 27 i S_8? Av orden 30?

Oppgave 6

La G være en gruppe med 12 elementer. Vis at G ikke er en simpel gruppe.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Sverre Smalø Telefon: 73 59 17 50

EKSAMEN I FAG MNFMA205/SIF5021

Bokmål
Tirsdag 6. mai 2003
Kl. 09.00 - 14.00

Hjelpemidler: Utdelt geometrisk figur.
- Typegodkjent kalkulator med tomt minne

Sensuren faller 27. mai 2003

Kandidatene skal løse oppgave 1, 2, 3 og 4 eller 1, 2, 3 og 5

Oppgave 1

Betrakt

$$GL_2(\mathbb{Z}_5) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}_5, ad - bc \neq 0 \right\}$$

under matrisemultiplikasjon over $\mathbb{Z}_5$.

La H være undergruppe av $GL_2(\mathbb{Z}_5)$ generert av

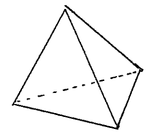
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Vis at H er abelsk. Finn orden til H.

b) Hvilken abelsk gruppe på form $\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_m^{\alpha_m}}$ er H ismorf med der p_i er primtall og α_i er naturlige tall.

Oppgave 2

Betrakt tetraederet



De 6 kantene på tetraederet skal farges med 4 mulige farger.

a) Beskriv gruppa av symetrier på tetraderet som en gruppe av permutasjoner på de 6 kantene.

b) Avgjør hvor mange forskjellige tetrader en kan lage når de 6 kantene kan farges med 4 farger og to tetrader betraktes som like når de kan dreies over i hverandre.

Oppgave 3

La G være en gruppe og la $Aut(G) = \{h : G \to G | h$ er en gruppeisomorfi $\}$.

a) Vis at $Aut(G)$ er en undergruppe av gruppen S_G av alle bijeksjoner på G under sammensettning.

b) La $\phi : G \to S_G$ være gitt ved at funksjon $\phi(g) \in S_G$ er gitt ved $\phi(g)(h) = ghg^{-1}$ for $h \in G$. Vis at ϕ er en gruppehomomorfi med bilde i $AutG$, *i.e.* $Im\phi \leq AutG$.

c) Finn kjernen til ϕ og vis at bilde til ϕ er en normal undergruppe i $AutG$.

Oppgave 4

La $\mathbb{Z}_5$ være kroppen med fem elementer.

a) Finn alle moniske irreduktible 2. gradspolynom over $\mathbb{Z}_5$ på form $x^2 + a$, $a \in \mathbb{Z}_5$.

b) Betrakt ringen

$$M_2(\mathbb{Z}_5) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$

under matriseaddisjon og multiplikasjon modulo 5.

La

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} b & 2a \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5, \right\} \leq M_2(\mathbb{Z}_5).$$

Vis at F er kropp med 25 elementer.

c) Betrakt matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$ og definer $\phi : \mathbb{Z}_5[x] \to M_2(\mathbb{Z}_5)$ ved $\phi(f) = f(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$.

Finn kjernen til ϕ og vis at F fra del b) av denne oppgaven er bildet til ϕ.

Oppgave 5

La G være gruppen $GL_2(\mathbb{Z}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} |a, b, c, d, \in \mathbb{Z}_3, ad - bc \neq 0 \right\}$ under matrisemultiplikasjonen.

a) Vis at $|G| = 48$

b) La $\mathbb{Z}_3^*$ være gruppa $\{ 1, 2 \}$ under multiplikasjon modulo 3.

Definer $\phi : GL_2(\mathbb{Z}_3) \to \mathbb{Z}_3^*$ ved $\phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

Finn kjernen til ϕ, Kerϕ og vis at $|\text{Ker}\phi| = 24$.

c) Vis at

$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ er en Sylow-3-undergrupper i Kerϕ og avgjør hvor mange Sylow-3-undergrupper Kerϕ har.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Anita Valenta 735 50285

EKSAMEN I FAG SIF5021 ALGEBRA OG TALLTEORI

Onsdag 7. august 2002
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler:
- Utdelt geometrisk figur
- Bestemt enkel kalkulator tillatt

Sensuren faller 28. august

Oppgave 1
La G være undergruppen av alle inverterbare 2×2 - matriser over $\mathbb{Z}_4$ gitt ved

$$G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Z}_4, \quad ac = 1\}$$

a) Finn orden til G.

La X bestå av alle par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{Z}_4$ og la G virke på X ved

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cy \end{pmatrix} \quad \text{for alle} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X.$$

(Det oppgis at dette er en gruppevirkning av G på X.)

b) Finn banene (orbits) og isotropiundergruppene G_x, av G til elementene $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ i X.

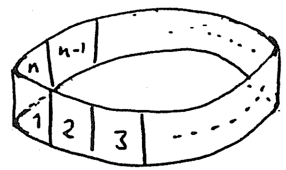
c) Hvilken kjent gruppe fra læreboka (John B. Fraleigh, A first course in Abstract Algebra) er G isomorf med? Svaret må begrunnes.

Oppgave 2
Det kinesiske restteoremet (Chinese Remainder Theorem) gir at $(\mathbb{Z}_n)^*$, gruppen av tall m med $1 \leq m < n$ som er relativt primisk til n, med multiplikasjon modulo n er isomorf med $(\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}})^* \times (\mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}})^* \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{p_r^{\alpha_r}})^*$ når $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ med $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ primtall og $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ naturlige tall.

a) Utnytt Det kinesiske restteoremet til å finne orden til gruppen G av element m med $1 \leq m < 900$ som er relativt primisk til 900 under multiplikasjon modulo 900.

b) Hvilken gruppe på form $\mathbb{Z}_{q_1^{\beta_1}} \times \mathbb{Z}_{q_2^{\beta_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{q_s^{\beta_s}}$ der q_i er primtall og β_i naturlige tall for $i \in 1 \cdots$? er G isomorf med?

Oppgave 3
Et vaktselskap har tatt på seg ansvaret for å merke alle hundene i en by ved å gi hundene et halsbånd sydd sammen av stive, rektangulære lærbiter som vist på figuren. Det er tre farger tilgjengelig på lærbitene, og alle halsbånd skal bestå av like mange lærbiter. To halsbånd oppfattes som like når de kan roteres over i hverandre i rommet.



a) Hva er symetrigruppen til et halsbånd med n felter?

b) I byen er det 100.000 hunder. Hvor mange felter trengs på halsbåndene for at ikke to hunder skal ende opp med like halsbånd?

Oppgave 4
La F være en kroppsutvidelse av $\mathbb{Z}_2$ med 16 elementer.

a) La $a \in F \backslash \mathbb{Z}_2$. Hva kan graden til minimalpolynomet til a være? Svaret skal begrunnes.

b) Hvor mange irreduktible polynom f av grad 4 finnes i $\mathbb{Z}_2[x]$?

La

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_2),$$

der $M_4(\mathbb{Z}_2)$ er ringen av 4×4-matrisen over $\mathbb{Z}_2$. Definer

$$\varphi : \mathbb{Z}_2[x] \to M_4(\mathbb{Z}_2) \quad \text{ved} \quad \varphi(f) = f(A) \forall f \in \mathbb{Z}_2[x].$$

c) Finn $\operatorname{Ker} \varphi$, kjernen til φ.

d) Hva kan sies om $\operatorname{Im} \varphi$, bildet til φ. Svaret skal begrunnes.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Sverre O. Smalø 735 91750

EKSAMEN I FAG SIF5021 ALGEBRA OG TALLTEORI

Fredag 10. mai 2002
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler:
– Utdelt geometrisk figur
– Bestemt enkel kalkulator tillatt

Sensuren faller 5.juni.

Oppgave 1
La $G = GL_2(\mathbb{Z}_2)$ være gruppen av 2×2-matriser over $\mathbb{Z}_2$ med determinant $\neq 0$ under matrisemultiplikasjon.

a) Finn ordenen til G.

La $X = M_2(\mathbb{Z}_2)$ være mengden av alle 2×2-matriser over $\mathbb{Z}_2$ og la G virke på X ved $* : G\times X \to X$ gitt ved $g * m = gmg^{-1}$ for $g \in G$ og $m \in X$, der gmg^{-1} betegner matrisemultiplikasjon av de tre matrisene g, m og g^{-1}.

b) Finn banene (the orbits) til elementene $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ i X under denne virkningen av G.

c) En av banene fra (b) har tre elementer. Kall denne Y og la S_Y betegne gruppen av permutasjoner på Y. Definer $\varphi : G \to S_Y$ ved at for hver $g \in G$ er $\varphi(g)$ som element i S_Y gitt ved $\varphi(g)(y) = g * y \quad \forall y \in Y$. Vis at φ er en gruppehomomorfi.

d) Finn kjernen til φ der φ er som definert i (c). Er G isomorf med en kjent gruppe fra læreboka (A first Course in Abstract algebra, 6. utg. John B. Fraleigh)? Svaret skal begrunnes.

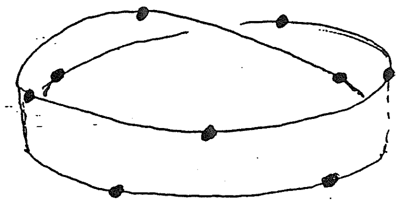
Oppgave 2
La $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$ være et helt tall med $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ primtall og $a_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, m$.

a) Vis at $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_m^{a_m}\mathbb{Z}$ gitt ved $\varphi(x) = (x + p_1^{a_1}\mathbb{Z}, \cdots, x + p_m^{a_m}\mathbb{Z})$ er en ringhomomorfi med $n\mathbb{Z}$ som kjerne.

b) Bruk (a) til å vise at $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_m^{a_m}}$ som ringer og at $(\mathbb{Z}_n)^*$, gruppen av enheter i $\mathbb{Z}_n$ under multiplikasjon modulo n, er isomorf med $(\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}})^* \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{p_m^{a_m}})^*$ der $(\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}})^*$ er gruppen av enheter i $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$ under multiplikasjon modulo $p_i^{a_i}$ for $i = 1, \cdots, m$.

c) La G bestå av alle tall som er relativt primiske til 200 under multiplikasjon modulo 200. Avgjør hvilken abelsk gruppe på form $\mathbb{Z}_{q_1^{b_1}} \times \mathbb{Z}_{q_2^{b_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{q_k^{b_k}}$ med q_j primtall og b_j positive heltall for $j = 1, \cdots, k$ som G er isomorf med. (Hint: bruk (b).)

Oppgave 3
En gullsmed lager armbånd med edelstener. Han har 4 typer edelstener til disposisjon; rubiner, smaragder, safirer og opaler. Selve armbåndet er laget av gull, men med egenskapen at det kan bøyes og tvistes, og han gir det form av et møbiusbånd med 9 stener plassert regelmessig rundt båndet som indikert på følgende figur.



(Se utdelt figur)

a) Beskriv gruppen G av symmetrier av armbåndet. Det oppgis at $|G| = 18$.

b) Regn ut hvor mange forskjellige armbånd gullsmeden kan lage.

Oppgave 4
La $\mathbb{Z}_3 \subseteq F$ være en kroppsutvidelse av $\mathbb{Z}_3$ slik at F har 27 elementer

a) La $a \in F \backslash \mathbb{Z}_3$. Hva er graden, $\deg(a, \mathbb{Z}_3)$, til minimalpolynomet til a over $\mathbb{Z}_3$? Svaret skal begrunnes.

b) Hvor mange moniske irreduktible polynom f av grad 3 finnes i $\mathbb{Z}_3[X]$? Svaret skal begrunnes.

c) La $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_3)$ der $M_3(\mathbb{Z}_3)$ betegner ringen av alle 3×3-matriser over $\mathbb{Z}_3$. Definer $\varphi_A : \mathbb{Z}_3[X] \to M_3(\mathbb{Z}_3)$ ved $\varphi_A(f) = f(A)$. Finn $\operatorname{Ker} \varphi_A$.

d) Vis at bildet til φ, $\operatorname{Im} \varphi_A$, er en kropp med 27 elementer og avgjør om A er en generator for den sykliske gruppen $(\operatorname{Im} \varphi_A)^*$.

Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Sverre Smalø Telefon: 73 59 17 50

EKSAMEN I FAG MNFMA205 ALGEBRA

Bokmål
Tirsdag 21. mai 2002
Kl. 09.00 - 14.00

Hjelpemidler: Utdelt geometrisk figur.
Bestemt enkel kalkulator tillatt.

Sensuren faller 11. juni 2002.

Oppgave 1

La $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Z}_3, ac \neq 0 \right\}$ under matrisemultiplikasjon.

a) Vis at G er en undergruppe av gruppen av inverterbare 2×2-matriser over $\mathbb{Z}_3$, og finn ordenen til G.

La $X = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ der vi oppfatter elementene i X som 2×1-matriser; $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$, over $\mathbb{Z}_3$. La G virke på X ved $* : G \times X \to X$ gitt ved $g*v = gv$ for $g \in G$ og $v \in X$ der gv betegner matrisemultiplikasjon av 2×2-matrisen g med 2×1-matrisen v.

b) Finn banen til elementet $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ og isotropiundergruppen til $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ved denne virkningen.

c) Hvor mange Sylow-2-undergrupper har G.

d) Hvor mange Sylow-3-undergrupper har G

e) Hvilken kjent gruppe i læreboka er G isomorf med?

Oppgave 2

En gullsmed lager "kronen" til prinsessebryllupet satt sammen av 4 kvadrat og 8 trekanter og hengslet som på den utdelte figuren. (kan tvistes og vrenges)

a) Beskriv gruppen G av symmetrier. det oppgis at $|G| = 8$.

b) Gullsmeden kan lage hver del i forskjellige legeringer som gir opphav til forskjellige farger. Han har tre slike legeringer til rådighet. Hvor mange forskjellige kroner kan lages?

Oppgave 3

Det Kinesiske restteorement (Chinese remainder theorem) gir at $(\mathbb{Z}_n)^*$, gruppen av tall m med $1 \leq m < n$ som er realtivt primisk til n med multiplikasjon modulo n er isomorf med $(\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}})^* \times (\mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}})^* \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{p_r^{\alpha_r}})^*$ der $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ med $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ primtall.

a) Utnytt dette til å finne ordenen til gruppen G av elemente $1 \leq m < 216$ som er relativt primiske til 216 under multiplikasjon modulo 216.

b) Finn hvilken gruppe på form $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ der $m_{i+1} | m_i$ for $i = 1, \cdots, k-1$, som G er isomorf med.

Oppgave 4

a) Vis at enhver syklisk gruppe G som innholder et element g av endelig orden med $g \neq e_G$, er endelig.

La $(\mathbb{Q}, +)$ være gruppen av rasjonale tall under addisjon.

b) Vis at enhver ikketriviell endeliggenerert undergruppe av $(\mathbb{Q}, +)$ er uendelig syklisk.

(Hint: Vis det først for en undergruppe generert av to elementer og bruk deretter induksjonen for det generelle tilfellet.)

**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Faglig kontakt under eksamen:
Bjørn Ian Dundas, telefon 735 50242

Sensuren faller 4. januar 2002

EKSAMEN I FAG MA205 Algebra

Fredag 7/12-2001
Tid: 09.00–14.00

Hjelpemidler:
- Ingen hjelpemiddler tillatt.

Alle svar skal begrunnes. Les gjennom settet før du begynner. Om det er et punkt du ikke får til, kan du likevel bruke resultatet andre steder i settet.

Oppgave 1

a) Betrakt syklene $\sigma = (1456)$ og $\tau = (215)$ i S_7. Regn ut produktet $\sigma\tau$ og skriv $\sigma\tau$ som et produkt av disjunkte sykler.

b) Gruppen S_7 virker på mengden $M = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Beskriv banen (the orbit) og isotropiundergruppen til $1 \in M$. Beskriv fikspunktmengden $M_\sigma = \{n \in M | \sigma(n) = n\}$ til $\sigma = (1456) \in S_7$.

c) La C_{20} være en syklisk gruppe av orden 20. Beskriv alle undergruppene til C_{20}.

d) Vis at vi har en gruppeisomorfi

$$(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})/\langle(2,4)\rangle \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}$$

[hint: konstruer en surjektiv (onto) gruppehomomorfi $f\colon \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}$ med kjerne $\langle(2,4)\rangle$, og forklar kort hvorfor dette gir den ønskede isomorfien].

Oppgave 2 På grunn av en utilgivelig tabbe har far glemt å kjøpe lys til adventsstaken. Adventsstaken har form som et kvadrat med ett lys i hvert hjørne. I kjøkkenskuffen finner han fire lys som er blå, og fire lys som er røde. Hvor mange måter kan han plassere lys i adventsstaken? (to staker som er like opp til en rotasjon betraktes som like). Du skal bruke Burnsides formel.

Oppgave 3

a) La H og K være to normale undergrupper av en gruppe G. Anta at $H \cap K$ er triviell. Vis at om $h \in H$ og $k \in K$, så er $hk = kh \in G$. Vis at funksjonen

$$f\colon H \times K \to G$$

gitt ved $f(h,k) = hk$ er en injektiv (one-to-one) gruppehomomorfi. Vis at f er en isomorfi hvis G er endelig og $|H||K| = |G|$.

b) Vis at en gruppe av orden 33 er syklisk.

Oppgave 4 Betrakt Klein's 4-gruppe

$$V = C_2 \times C_2 = \{(0,0),(1,1),(1,0),(0,1)\}$$

(med komponentvis addisjon modulo 2).

a) Det finnes en "multiplikasjon" $V \times V \to V$ slik at V med denne multiplikasjonen blir en kropp med enhet $(1,1)$. Vi kaller denne kroppen $\mathbf{F}_4$. Fyll ut multiplikasjonstabellen for $\mathbf{F}_4$. Beskriv gruppen av invertible elementer i $\mathbf{F}_4$.

Multiplikasjonstabell for kroppen $\mathbf{F}_4$

	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(1,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$		
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$		

Betrakt undergruppen G av de invertible elementene i matriseringen $M_2(\mathbf{F}_4)$ gitt ved

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{F}_4) \,\middle|\, a \cdot d = (1,1) \in \mathbf{F}_4 \right\}$$

(med matrisemultiplikasjon). Det opplyses at G har orden 12.

b) Er G abelsk? Betrakt funksjonen $f\colon G \to (\mathbf{F}_4)^*$ fra G til gruppen av invertible elementer i $\mathbf{F}_4$ gitt ved

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = a$$

Vis at f er en gruppehomomorfi. Beskriv kjernen $ker\{f\} \leq G$ og vis at $ker\{f\}$ er isomorf med V.

c) Hvor mange Sylow-2 undergrupper har G? Hvor mange Sylow-3 undergrupper har G?

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Sverre Smalø Telefon: 73 59 17 50

EKSAMEN I FAG MNFMA205 ALGEBRA

Bokmål
Onsdag 23. mai 2001
Kl. 09.00 - 14.00

Hjelpemidler: Utdelt geometrisk figur.

Sensuren faller 13. juni.

Oppgave 1

Betrakt matrisene

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i gruppen $GL_2(\mathbb{R})$ av inverterbare reelle 2×2 matriser.

a) Finn ordenen til M_1 og M_2.

b) Vis at M_1 og M_2 genererer en endelig abelsk undergruppe av $GL_2(\mathbb{R})$ og gi den rasjonale kanoniske formen av denne (i.e. bestem n og m_i, $i = 1, \dots, n$, slik at $\langle M_1, M_2\rangle \simeq \mathbb{Z}/m_1 \times \mathbb{Z}/m_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_n$ med $m_{i+1} \mid m_i$, $i = 1, \dots, n-1$.

Oppgave 2

La p være et primtall og betrakt kroppen $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$

La $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Z}_p,\ a \neq 0 \right\}$

a) Vis at G er en undergruppe av $GL_3(\mathbb{Z}_p)$ under matrisemultiplikasjon.

b) Vis at $|G| = (p-1)p^2$.

c) Finn en Sylow-p-undergruppe i G og avgjør hvor mange Sylow-p-undergrupper G har.

Oppgave 3

a) Beskriv gruppen av stive begevelser på et regulært tetraeder. (Utdelt figur.)

b) Hver flate er delt i tre likebeinede trekanter som på modellen dere har fått utdelt.

Finn hvor mange forskjellige tetraeder dere kan lage med 3 farger tilgjengelig når hver av de småtrekantene skal fargelegges og der to tetraeder er like når de kan dreies over i hverandre.

Oppgave 4

La $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ betegne de naturlige tall og la $S_{\mathbb{N}}$ være gruppen av permutasjoner på $\mathbb{N}$ under sammensetning. For hver $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ la $\overline{\mathbb{N}}_\sigma = \{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \neq n\}$, og la $S_{(\mathbb{N})} = \{\sigma \in S_{\mathbb{N}} \mid |\overline{\mathbb{N}}_\sigma| < \infty\}$.

a) Vis at $S_{(\mathbb{N})}$ er en undergruppe av $S_{\mathbb{N}}$ og at den er normal.

b) La S_n være gruppen av permutasjoner på $\{1, \dots, n\}$. Definer $\varphi_n : S_n \to S_{(\mathbb{N})}$ med

$$\varphi_n(\sigma)(t) = \begin{cases} \sigma(t) & t \in \{1, \dots, n\} \\ t & t \in \{n+1, n+2 \dots\} \end{cases}$$

Vis at φ_n er en injektiv (en-en-tydig) gruppehomomorfi for hver $n \in \mathbb{N}$, og at $S_{(\mathbb{N})} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Im} \varphi_n$ (der $\operatorname{Im} \varphi_n$ er bildet av φ_n.)

c) La $A_{(\mathbb{N})} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(A_n)$ der A_n er den alternerende gruppen (i.e. undergruppen av S_n bestående av jamne (even) permutasjoner.)

Vis at $A_{(\mathbb{N})}$ er en normal undergruppe i $S_{(\mathbb{N})}$.

(Hint: Bruk at A_n er normal i S_n for alle n.)

d) Vis at $A_{(\mathbb{N})}$ er en enkel (simple) gruppe.
(Hint: Bruk at A_n er enkel (simple) for $n \geq 5$.)

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Professor Sverre O. Smalø
Telefon: 73 59 17 50

Eksamen i MNFMA205/SIF5022, *Algebra*
Tirsdag 5. desember 2000
Kl. 9-14
Tillatte hjelpemidler: Utdelt geometrisk figur
Sensurdato: 3. januar 2001

Oppgavene 1, 2 og 3 er felles for alle. De som har valgt gruppeteorivarianten besvarer oppgave 4 i tillegg og de som har valgt ringteorivarianten løser oppgave 5 i tillegg til oppgavene 1, 2 og 3.

Oppgave 1

a) Beskriv alle abelske grupper av orden 16 opp til isomorfi.

b) La G $\{1 \leq a < 40 | a$ er relativt primisk til $40\}$ med multiplikasjon modulo 40. Finn elementene i G og avgjør hvilke av gruppene i a) som G er isomorf med.

Oppgave 2

La

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{Z} \right\}$$

a) Vis at H blir en abelsk gruppe under vanlig matrisemultiplikasjon.

b) Vis at H er ismorf med $(\mathbb{Z}, +)$.

La

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = 1 \right\}$$

Det oppgis at G er en gruppe under vanlig matrisemultiplikasjon.

c) Finn orden til elementene $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ og $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i G og til elementene MN og NM.

d) H som definert ovenfor er en undergruppe av G. Er H en normal undergruppe? (Svaret må begrunnes).

Oppgave 3

En gullsmed lager armbånd med edelstener. Han har 3 typer stener til disposisjon, rubiner, smagrader og opaler. Selve armbåndet er laget av en stiv gullring med 12 edelstener felt inn regelmessig på randen som vist på tegningen.

a) Beskriv gruppen av symmetrier på armbåndet.

b) Finn hvor mange slike forskjellige armbånd som gullsmeden kan lage.

Oppgave 4

La p være et primtall og betrakt kroppen $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$

La $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d, \in \mathbb{Z}_p, \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \right\}$

a) Vis at $|G| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$.

b) La H være undergruppen i G gitt ved $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \middle| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \right\}$. Hva er ordenen til H?

c) Vis at $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{Z}_p \right\}$ er en Sylow p-undergruppe av H.

d) Hvor mange Sylow-p-undergrupper har H? Svaret må begrunnes

Oppgave 5

La $\mathbb{Q}$ betegne de rasjonale tall og $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ ringen av alle 2 x 2 - matriser med fra $\mathbb{Q}$ og betrakt matrisen

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}).$$

Definer $\phi_a : \mathbb{Q}[X] \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ ved $\phi_a(f) = f(a)$

a) Finn kjernen til ϕ_a.

b) Vis at bildet til ϕ_a er $\left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ og at dette er en kropp.

c) Finnes det flere underringer av $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ isomorf med bildet til ϕ_a? Svaret må begrunnes.

..es teknisk-naturvitenskapelige
..ersitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Ivar K. Amdal
Telefon: 9 34 68

75051 ALGEBRA

Bokmål
Torsdag 24. august 2000
Kl. 9-14
Hjelpemidler: Utdelt geometrisk figur
Sensur: Onsdag 10. september 2000

Oppgave 1

a) Beskriv alle abelske grupper av orden 16 opp til isomorfi?

b) La $G = \{1 \leq a < 48 \mid \text{slik at } a \text{ er relativt primisk med } 48\}$ med multiplikasjon modulo 48. Finn G og avgjør hvilken av gruppene i a) som G er isomorf med.

Oppgave 2

La $\mathbf{C}$ være de komplekse tall og betrakt mengden av komplekse 2×2-matriser gitt ved

$$H^{*} = \left\{0 \neq \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{C}\right\}$$

der $\bar{x}$ betegner den komplekskonjugerte av x.

a) Vis at H^{*} er en gruppe under matrisemultiplikasjon.

b) Finn undergruppen G av H^{*} generert av

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{og} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

og ordenen til de 8 elementene i G.

c) Er G isomorf med D_4?

Oppgave 3

a) Finn antall fargelegginger av hjørnene på et regulært tetraedre som kan lages ved hjelp av 4 farger når fargelegginger av to tetraedre oppfattes som like hvis en kan få det ene tetraedret til å bli lik det andre ved dreiing.

b) Finn antall fargelegginger av hjørnene på et tetraedre som kan lages ved hjelp av 4 farger når fargelegginger av to tetraedre oppfattes som like hvis en kan få det ene tetraedre til å bli lik det andre ved dreiing eller speiling.

Oppgave 4

Betrakt kroppen $\mathbf{Z}_2$ med to elementer.

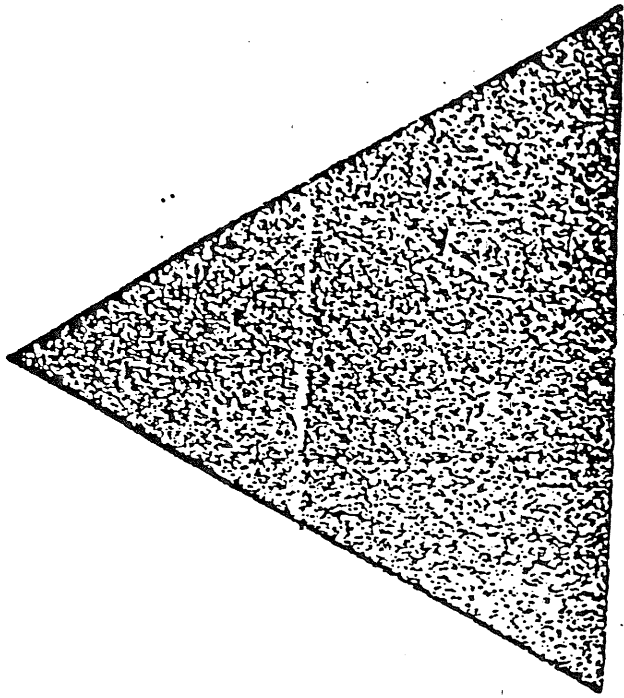
a) Finn alle irreduktible polynom av grad 5 over $\mathbf{Z}_2$.

b) Konstruer en kropp med 32 elementer.

c) Betrakt elementet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i ringen $M_{5\times 5}(\mathbf{Z}_2)$ av 5×5-matrisen over $\mathbf{Z}_2$, og definer $\phi \colon \mathbf{Z}_2[X] \to M_{5\times 5}(\mathbf{Z}_2)$ ved $\phi(f) = f(A)$, der $\mathbf{Z}_2[X]$ er polynomringen i en variabel over $\mathbf{Z}_2$. Finn $\operatorname{Ker}\phi$, kjernen til ϕ, og vis at $\operatorname{Im}\phi$, bildet til ϕ, er en kropp med 32 elementer.



rges teknisk-naturvitenskapelige
iversitet
stitutt for matematiske fag

glig kontakt under eksamen: Inger Heidi Slungård
59 18 92

Eksamen i MNFMA 205/75051, *Algebra*

Tirsdag 7. desember 1999
Kl. 9-14
Tillatte hjelpemidler: Utdelt kalkulator
Sensurdato: 7. januar 2000

udentene skal løse 4 av de 5 oppgavene. De som tar eksamen i MNFMA 205 skal løse ppgavene 1, 2, 3 og 4, og de som tar eksamen i 75051 skal løse oppgavene 1, 2, 3 og 5.

ppgave 1 La $G = \{1, 9, 16, 22, 29, 53, 74, 79, 81\}$. Multiplikasjon modulo 91, $\cdot_{91}$, er en ldefinert assosiativ binær operasjon på G.

a) Vis at G med den angitte binær operasjonen $\cdot_{91}$ er en gruppe.

b) Hvilken kjent gruppe er G isomorf med? Svaret skal begrunnes.

ppgave 2

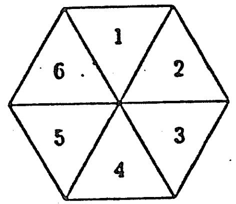
a) La F være en kropp, $a \in F$ og $f(x) \neq 0$ et polynom i $F[x]$. Vis at $(x-a)$ er en faktor i $f(x)$ hvis og bare hvis a er et nullpunkt for $f(x)$.

b) Skriv polynomet $f(x) = x^4 + x^2 + 3x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ som et produkt av irredusible polynom i $\mathbb{Z}_5[x]$.

Oppgave 3

a) La $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_6$. Skriv ρ som et produkt av disjunkte sykler og som et produkt av transposisjoner.

b)



Figuren over er en regulær sekskant som er delt opp i seks like felter. Finn gruppen G av symmetrier på figuren og beskriv elementene som produkt av disjunkte sykler. (Det oppgis at $|G| = 12$.)

c) Er G en normal undergruppe av S_6? Svaret skal begrunnes.

d) De 6 feltene på figuren skal fargelegges og du har 4 farger tilgjengelig. Fargelegginger som går over i hverandre ved speilinger og rotasjoner blir betraktet som like. Hvor mange forskjellige fargelegginger kan du lage?

Oppgave 4 (For de som tar eksamen i MNFMA 205)

a) La G være en gruppe der $|G| = p^2$, p primtall. Vis at G er abelsk.

b) La G være en endelig gruppe. La C være kommutator undergruppen til G, dvs. gruppen generert av alle element av formen $aba^{-1}b^{-1}$, der $a, b \in G$.

La N være en normal undergruppe av G. Vis at hvis G/N er abelsk, så er C en undergruppe av N.

c) Vis at enhver gruppe av orden 45 er abelsk.

Oppgave 5 (For de som tar eksamen i 75051)

a) La F være en kropp, og la $I = \langle f(x) \rangle \neq \{0\}$ være et maksimalt ideal i $F[x]$. Vis at $f(x)$ er et irredusibelt polynom i $F[x]$.

b) Avgjør om ringene $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + 2x + 3 \rangle$ og $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^3 + x^2 + x + 2 \rangle$ er kropper og/eller integritets områder. Svaret skal begrunnes.

c) La $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ være kroppen med to elementer. Finn alle moniske irredusible polynomer i $\mathbb{Z}_2[x]$ av grad 3.

d) Konstruer en kropp F med 8 elementer, og angi de to binær operasjonene på F.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Inger Heidi Slungård
73 59 18 92

Eksamen i 75051, *Algebra*
Fredag 26. november 1999
Kl. 9-14
Tillatte hjelpemidler: Utdelt kalkulator
Sensurdato: 17. desember 1999

Oppgave 1

La $G = \{1 \geq a \geq 20 | a$ og 20 er relativt primiske $\}$. Multiplikasjon modulo 20, $\cdot_{20}$, er en veldefinert assosiativ binær operasjon på G.

a) Vis at G er en gruppe.

b) Hvilken kjent gruppe er G isomorf med? Svaret skal begrunnes.

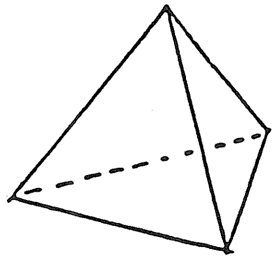
Oppgave 2

a) Ringene $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$ og $\mathbb{R}[X]$ er alle kommutative ringer med enhet 1. Hvilke av disse ringene er integritets områder, og hvilke er kropper? Svarene skal begrunnes.

b) Vis at polynomet $f(x) = x^3 + 3x + 2$ er irredusibelt over $\mathbb{Z}_5$.

Oppgave 3

a) La $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S_8$. Skriv ρ som et produkt av disjunkte sykler og som et produkt av transposisjoner.



b) Figuren over er et regulært tetraeder. Finn gruppen G av symmetrier på figuren og beskriv elementene som produkt av disjunkte sykler. (Det oppgis at $|G| = 12$.)

c) Er G en normal undergruppe av S_4? Svaret skal begrunnes.

d) De 4 flatene på figuren skal fargelegges og du har 5 farger tilgjengelig. Fargelegginger som går over i hverandre ved symmetrier blir betraktet som like. Hvor mange forskjellige fargelegginger kan du lage?

Oppgave 4

a) La R være en kommutativ ring med enhet 1. Vis at R er en kropp hvis og bare hvis $\{0\}$ og R er de eneste idealene i R.

b) La F være en kropp. Vis at alle idealer i $F[X]$ er hovedidealer, dvs. av formen $\langle f(x) \rangle$ der $f(x) \in F[X]$.

c) La $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$ være kroppen med tre elementer. Finn alle moniske irredusible polynomer i $\mathbb{Z}_3[X]$ av grad 2.

d) Konstruer en kropp F med 9 elementer, og angi de to binær operasjonene på F.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Sverre O. Smalø
Telefon: 9 17 50

MNFMA 205 ALGEBRA

Bokmål
Onsdag 19. mai 1999
Kl. 9-14
Hjelpemidler: Utdelt geometrisk figur
Sensur: Onsdag 9. juni 1999

Oppgave 1

a) Beskriv alle abelske grupper av orden 16 opp til isomorfi?

b) La $G = \{1 \leq a < 32 \mid \text{slik at } a \text{ er relativt primisk med } 32\}$ med multiplikasjon modulo 32. Finn G og avgjør hvilken av gruppene i a) er G isomorf med?

Oppgave 2

La $\mathbb{C}$ være de komplekse tall og betrakt mengden av komplekse 2×2-matriser gitt ved

$$H^{*} = \left\{ 0 \neq \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

der $\bar{x}$ betegner den komplekskonjugerte av x.

a) Vis at H^{*} er en gruppe under matrisemultiplikasjon.

b) Finn undergruppen G av H^{*} generert av

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{og} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

og ordenen til de 8 elementene i G.

c) Er G isomorf med D_4?

Oppgave 3

Lille Jonas har fått et byggesett av mor som han kan lage forskjellige geometriske modeller med. Det er i alt 4 farger tilgjengelig på flatene i settet og Jonas lurer på hvor mange «forskjellige» regulære tetraeder han kan lage av disse dersom han identifiserer to tetraeder som kan dreies over i hverandre.

Han lurer også på antallet som kan lages dersom han i tillegg oppfatter to som like dersom de ser like ut etter dreing og bruk av et speil. (Se utdelt modell.)

a) Finn antall fargelegginger av flatene på et regulært tetraedre som kan lages ved hjelp av 4 farger når fargelegginger av to tetraedre oppfattes som like hvis en kan få det ene tetraedret til å bli lik det andre ved dreiing.

b) Finn antall fargelegginger av flatene på et tetraedre som kan lages ved hjelp av 4 farger når fargelegginger av to tetraedre oppfattes som like hvis en kan få det ene tetraedre til å bli lik det andre ved dreiing eller speiling.

Oppgave 4 (Gruppeteorivarianten)

Betrakt gruppen S_5 av alle permutasjoner på 5 elementer.

La $A_5 = \{\tau \in S_5 \mid \tau \text{ er jamn permutasjon}\}$.

a) Vis at A_5 er en normal undergruppe av S_5.

b) Finn antall elementer i A_5 av orden $1, 2, 3$og5.

c) Vis at A_5 er en simpel gruppe.

Hint:

Bruk Sylow-teori til å vise at enhver normal undergruppe av A_5 som inneholder et element av orden 3 inneholder alle elementer av orden 3 og enhver normal undergruppe som innholder et element av orden 5 inneholder alle elementer av orden 5. Vis videre at snittet mellom to undergupper av orden 4 bare består av ett element.

Oppgave 5 (Ringteorivarianten).

Betrakt kroppen $\mathbb{Z}_2$ med to elementer.

a) Finn alle irreduktible polynom av grad 5 over $\mathbb{Z}_2$.

b) Konstruer en kropp med 32 elementer.

c) Betrakt elementet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i ringen $M_{5\times 5}(\mathbb{Z}_2)$ av 5×5-matrisen over $\mathbb{Z}_2$, og definer $\phi\colon \mathbb{Z}_2[X] \to M_{5\times 5}(\mathbb{Z}_2)$ ved $\phi(f) = f(A)$, der $\mathbb{Z}_2[X]$ er polynomringen i en variabel over $\mathbb{Z}_2$. Finn $\operatorname{Ker}\phi$, kjernen til ϕ, og vis at $\operatorname{Im}\phi$, bildet til ϕ, er en kropp med 32 elementer.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Sverre Smalø
73 59 17 50

Eksamen i MNF MA 205/75051, *Algebra*

Mandag 7. desember 1998
Kl. 9–14
Tillatte hjelpemidler: Utdelt geometrisk figur
Sensurdato: 4. januar

Oppgave 1, 2, 3 og 4 er felles for alle. De som har valgt gruppeteoridelen besvarer oppgave 5, mens de som har valgt ringteoridelen besvarer oppgave 6.

Oppgave 1

Betrakt følgende mengde av 3×3 reelle matriser

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1\\1&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix} \right\}$$

som en gruppe under vanlig matrisemultiplikasjon.

a) Vis at $\phi\colon G \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved $\phi(M,u) = M \cdot u$, der $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a\\b\\c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$, gir en gruppevirkning av G på $\mathbb{R}^3$.

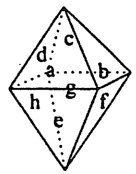
b) Finn orbitene og isotropigruppene til elementene $\begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix}$.

Oppgave 2

Betrakt gruppen $G = \{ a : 1 \le a \le 36,\ a \text{ relativt primisk til } 36 \}$ under multiplikasjon modulo 36. Bruk fundamentalteoremet for abelske grupper til å avgjøre hvilken gruppe av form $\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_n}$ som G er isomorf med der $d_i \mid d_{i+1}$ for $i = 1, \ldots, n-1$.

Oppgave 3

Betrakt oktaederet:



a) Beskriv gruppen G av «stive bevegelser» på det regulære oktaederet og hvordan den virker på de 8 flatene a, b, c, d, e, f, g, h, skrevet som produkt av disjunkte sykler. (Det oppgis at $|G| = 24$.)

b) I en barnehage skulle barna fargelegge flatene på et oktaeder. Barna hadde tre farger til rådighet og hver sideflate skulle males enten rød, blå eller gul. Hvor mange forskjellige malte oktaeder kunne barna male?

Oppgave 4

La p være et primtall og betrakt kroppen $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ bestående av tallene $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ med addisjon og multiplikasjon modulo p.

a) Betrakt $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d \end{pmatrix} : a,\ b,\ d \in \mathbb{Z}_p \text{ med } ad \neq 0 \text{ i } \mathbb{Z}_p \right\}$ med matrisemultiplikasjon modulo p. Hvor mange elementer har G?

b) Betrakt $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d \end{pmatrix} : a,\ b,\ d \in \mathbb{Z}_p,\ ad = 1 \text{ i } \mathbb{Z}_p \right\}$. Vis at H er normal i G og finn G/H.

Oppgave 5

a) Vis at enhver gruppe med 15 elementer er abelsk. Vis også at enhver gruppe med 51 elementer og enhver gruppe med 85 elementer er abelsk.

b) Vis at dersom G er en gruppe, A en abelsk gruppe og $\phi\colon G \to A$ er en gruppehomomorfi så er kommutatorundergruppen i G inneholdt i $\operatorname{Ker}\phi$.

c) Vis at enhver gruppe av orden 255 er abelsk.

Oppgave 6

a) La F være en kropp og $F \subseteq E$ en kroppsutvidelse slik at E er endeligdimensjonal som F-vektorrom. Vis at da er ethvert element $\alpha \in E$ algebraisk over F.

b) Betrakt elementet $a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_2)$, der $M_3(\mathbb{Z}_2)$ er ringen av 3×3-matriser over $\mathbb{Z}_2$. Definer $\phi_a\colon \mathbb{Z}[x] \to M_3(\mathbb{Z}_2)$ ved $\phi_a(f) = f(a)$. Finn kjernen til ϕ_a.

c) Hva kan en i lys av **b)** si om samlingen av matriser $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^n : n \in \mathbb{N} \right\}$, der a er matrisen gitt i **b)**, under addisjon og multiplikasjon i $M_3(\mathbb{Z}_2)$?

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Sverre Smalø
73 59 17 50

Eksamen i 75051/MNF MA 205, *Algebra*

Torsdag 3. desember 1998
Kl. 9–14
Tillatte hjelpemidler: Utdelt geometrisk figur
Sensurdato: 4. januar

Oppgave 1, 2, 3 og 4 er felles for alle. De som har valgt gruppeteoridelen besvarer oppgave 5, mens de som har valgt ringteoridelen besvarer oppgave 6.

Oppgave 1

Betrakt de to matrisene $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ og $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i gruppen av alle inverterbare 3×3-matriser over reelle tall.

a) Finn undergruppen G av $\mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$; gruppen av alle inverterbare 3×3-matriser over reelle tall under matrisemultiplikasjon som er generert av M_1 og M_2.

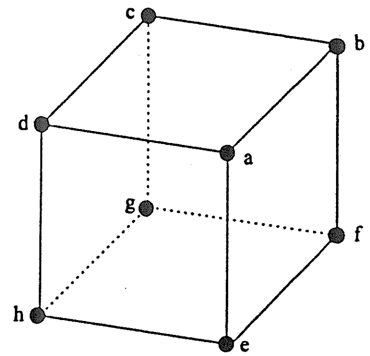
b) G virker på $\mathbb{R}^3$ ved $\phi\colon G \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved $\phi(M, \vec{v}) = M \cdot \vec{v}$ der $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ og $\cdot$ betegner vanlig matrisemultiplikasjon. Finn banen og isotropigruppene til elementene $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Oppgave 2

La G være gruppen bestående av $\{ a : 1 \leq a < 40 \text{ og relativt primisk til } 40 \}$, under multiplikasjon modulo 40. Finn hvilken gruppe på form $\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_n}$ der $d_i | d_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, som G er isomorf med.

Oppgave 3

Betrakt den regulære terningen:



med hjørner a, b, c, d, e, f, g, h.

a) Beskriv gruppen G av «stive bevegelser» av terningen og dens virkning på de 8 hjørnene skrevet som produkt av disjunkte sykler. (Det oppgis at $|G| = 24$.)

b) En gullsmed skulle lage terninger til sultanens harem. Haremet hadde like mange kvinner som antall forskjellige terninger gullsmeden kunne lage ved å plassere en edelstein i hvert hjørne der han hadde rubiner, smaragder og opaler til rådighet. Hvor mange kvinner var det i haremet?

Oppgave 4

Betrakt ringen $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$ og la

$$\mathrm{Gl}_2(\mathbb{Z}_3) = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc \neq 0 \right\}, \cdot\right)$$

være gruppen av inverterbare 2×2-matriser over $\mathbb{Z}_3$ under vanlig matrisemultiplikasjon. La $T_2(\mathbb{Z}_3) = \{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} : a \cdot d \neq 0 \}$.

a) Vis at $T_2(\mathbb{Z}_3)$ er en undergruppe av $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{Z}_3)$ og finn ordenen til $T_2(\mathbb{Z}_3)$.

b) Avgjør om $T_2(\mathbb{Z}_3)$ er normal i $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{Z}_3)$.

Oppgave 5

a) La G være en gruppe av orden 1309. Vis at G har en normal undergruppe H av orden 7 og en normal undergruppe K av orden 11 og vis at G/H og G/K er abelske.

b) Vis at dersom S er en gruppe og T en normal undergruppe så er S/T abelsk hvis og bare hvis kommutatorundergruppen av S er inneholdt i T.

c) Hvor mange grupper av orden 1309 finnes opp til isomorfi?

Oppgave 6

a) La $F \subseteq K$ være en kroppsutvidelse og α et algebraisk element i K. Hva er da dimensjonen over F til den minste kroppen i K som inneholder F og α?

Betrakt kroppen $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$ og betrakt elementet $a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i ringen $M_3(\mathbb{Z}_3)$ av 3×3-matriser over $\mathbb{Z}_3$.

Definer $\phi\colon \mathbb{Z}_3[x] \to M_3(\mathbb{Z}_3)$ ved $\phi(f) = f(a)$.

b) Finn kjernen til ϕ.

c) Hvor mange elementer har bildet til ϕ og hva kan en si om bildet?

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Sverre O. Smalø
73 59 17 50

Eksamen i MA 205, *Algebra*

Mandag 8. desember 1997
Kl. 9-14
Tillatte hjelpemidler: Ingen tillatte hjelpemidler
Sensurdato: 29. desember 1997

Studentene skal løse 4 av de 5 oppgavene. De som velger gruppeteorivarianten med Sylowteori skal løse oppgavene 1, 2, 3 og 4 og de som velger ring- og kroppsteorivarianten skal løse oppgavene 1, 2, 3 og 5.

Oppgave 1

La G være gruppen av alle tall $1 \leq a \leq 39$ som er relativt primisk til 40 under multiplikasjon modulo 40.

a) Finn orden til G.

b) Hvilken abelsk gruppe av form $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_m}$ der $n_i \mid n_{i+1}$, $1 \leq i < m$ er G isomorf med?
Svaret skal begrunnes.

Oppgave 2

a) Vis at dersom H er en gruppe og G er endelig delmengde slik at G er lukket m.h.p. gruppeoperasjon, så er G en undergruppe av H.

Betrakt delmengden

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

av gruppen $Gl_2(\mathbb{C})$, mengden av 2×2 inverterbare komplekse matriser, under vanlig matrisemultiplikasjon der $i^2 = -1$.

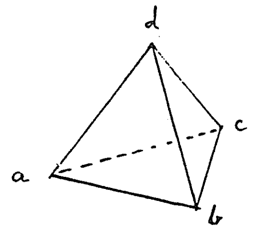
b) Vis at G er en undergruppe av $Gl_2(\mathbb{C})$ under vanlig matrisemultiplikasjon.

c) Finn senteret $Z(G)$ til G der $Z(G) = \{g \in G | gt = tg, \forall t \in G\}$, og vis at $G/Z(G) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

d) Er G isomorf med D_4? Svaret skal begrunnes.

Oppgave 3

Betrakt det regulære tetraederet



a) Finn gruppen G av symmetier på tetraederet. (Det oppgis at $|G| = 12$).

b) De 6 kantene på tetraederet skal males, og det er 4 farger tilgjengelig. Hvor mange forskjellige tetraeder kan en da lage?

Oppgave 4 (Gruppeteorivarianten).

La G være en gruppe av orden p^2q^2 der p og q er primtall og $p > q^2$.

a) Vis at da har G en normal undergruppe av orden p^2.

b) Vis at dersom $p \not\equiv \pm 1 \mod q$, så er G abelsk.

c) Vis at enhver gruppe av orden $5^2 \cdot 7^2$ er abelsk.

Oppgave 5 (Ring-og kroppsteorivarianten.)

La $(\mathbb{Z}_2 + \cdot)$ være kroppen med to elementer.

a) Finn alle irreduktible polynom i $\mathbb{Z}_2[X]$ av grad 3.

Betrakt elementet $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$, ringen av 3×3 matriser over $\mathbb{Z}_2$.

b) La $\varphi_A : \mathbb{Z}_2[X] \to \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$ være ringhomomorfien gitt ved at φ_A av polynomet $f = f_0 + f_1X + \cdots + f_nX^n$ i $\mathbb{Z}_2[X]$ er gitt ved $\varphi_A(f) = f_0 \cdot I + f_1A + \ldots + f_nA^n$ der I er matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finn kjernen $\mathrm{Ker}\varphi_A$, til φ_A.

c) Finn bildet $\mathrm{Im}\varphi_A$, til φ_A, og gi en begrunnelse for at $\mathrm{Im}\varphi_A$ er en kropp med 8 elementer under matriseaddisjon og matrisemultiplikasjon i $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Eldar Straume
73 59 66 83

Eksamen i MA 205, *Algebra*
Onsdag 21. mai 1997
Kl. 9-14
Tillatte hjelpemidler: Ingen
Sensurdato: Onsdag 11. juni 1997

Oppgave 1

a) Hvilke abelske grupper har orden 40?
Svaret gis som en liste av grupper, hvor ingen av gruppene er isomorfe med hverandre.

b) La $\mathbf{Z}$ og $\mathbf{Q}$ være gruppene av hele og rasjonale tall henholdsvis (med addisjon som binær operasjon).
Er noen av gruppene sykliske? Er gruppene isomorfe? Svaret skal begrunnes.

c) Besten alle homomorfier

$$\phi: \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$$

og bestem også hvilke ϕ som er en automorfi.

d) La

$$G = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \{(n,m); n \in \mathbf{Z},\ m \in \mathbf{Z}\}$$

være den frie abelske gruppen av rang 2. Vi ser på funksjoner $\phi: G \longrightarrow G$ av type

$$\phi : (n,m) \longrightarrow (n,m) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (na + mc, nb + md)$$

hvor matrisen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ er heltallig. Vis at ϕ er en homomorfi. Hvilken betingelse må a, b, c, d oppfylle for at ϕ skal være en automorfi?

Oppgave 2

a) Sentret til en gruppe G er definert som

$$Z(G) = \{x \in G;\ xy = yx,\ \forall y \in G\}$$

Vis at $Z(G)$ er en abelsk undergruppe av G.

b) Bestem $Z(S_3)$, hvor S_3 er permutasjonsgruppen til tre elementer.

c) Det er gitt en gruppe G med generatorer a, b som oppfyller relasjonene

$$a^2 = b^4 = e, \quad aba = b^{-1}\ (a \neq e, b^3 \neq e)$$

hvor e er identitetselementet. Skriv opp alle elementene til G uttrykt ved a og b. Hva er orden til G?

d) Bestem sentret til gruppen G i 2c).

e) Finn en geometrisk figur i det euklidske plan som har symmetrigruppe isomorf med gruppen G ovenfor. Hvilke transformasjoner av figuren svarer til elementene a og b.

Oppgave 3

a) La H være symmetrigruppen til et rektangel som ikke er et kvadrat. Beskriv strukturen til gruppen H, og vis at H er isomorf med et produkt $K_1 \times K_2$ hvor ingen av gruppene K_i er trivielle.

b) De fire kantene til rektanglet skal fargelegges, og en kan velge blant 4 forskjellige farger. Bruk Burnsides formel til å bestemme antall forskjellige fargelagte rektangler.

Oppgave 4

La K være en gruppe av orden 16.

a) Bestem alle Sylow p-grupper i K, for hvert primtall p.

b) Hva kan en si om mulig orden til de forskjellige undergruppene av K, i lys av Sylows teoremer?

c) Hvorfor finnes det alltid en homomorfi

$$\phi: K \longrightarrow \mathbf{Z}_2$$

som er surjektiv (på)?

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET

Bokmål

Eksamen i : **MA205 - ALGEBRA**

Dato : **Fredag 6. desember 1996**

Varighet : 5 timer
Antall vekttall : 3

Tillatte hjelpemidler:
Ingen

Sensur: Onsdag 3. januar 1997

Oppgave 1

(a) Bestem alle forskjellige kommutative grupper (opp til isomorfi) av orden 36.

(b) Bestem alle undergruppene til den sykliske gruppen $\mathbf{Z}_{36}$.

(c) Beskriv alle mulige homomorfier

$$\phi : \mathbf{Z}_{36} \to \mathbf{Z}$$

og alle mulige homomorfier

$$\Psi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_{36}$$

som er surjektive (dvs. bildet til Ψ er hele $\mathbf{Z}_{36}$).

Oppgave 2

I denne oppgaven lar vi X betegne de reelle tall, men skriver $\mathbf{R}$ når X oppfattes som gruppe m.h.p. operasjonen $+$. Videre er $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$ de reelle tall $\neq 0$, med multiplikasjon som produktregel.

(a) Beskriv produktregelen til produktgruppa $G = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. Hvilket element e er identitetselement? Finn en endelig undergruppe $\neq \{e\}$ i G.

(b) S_X betegner gruppa av permutasjoner (dvs. invertible transformasjoner) av X, og delmengda A_X betegner de affine transformasjoner ϕ definert ved at

$$\phi(x) = ax + r, a \neq 0$$

hvor a og r er faste reelle tall. Vis at A_X er en undergruppe av S_X. (Kort begrunnelse).

(c) Definer er ny binær opersjon $*$ på mengda $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ ved at $(a, r) \times (b, s) = ab, r + as)$. Mengda betegnes da med G^*.

Gjør rede for hvorfor G^* er en gruppe, og at den er isomorf med A_X. Er G^* isomorf med G? Begrunn svaret.

Oppgave 3

La $G = D_4$ være symmetri-gruppa til et kvadrat i det euklidiske plan.

(a) Finn to element a, b i G som genererer gruppa, og beskriv kort hva a og b gjør med kvadratet. Skriv også opp alle elementa i G uttrykt ved a og b (på enkleste måte).

(b) Konstruer en injektiv (eller en-entydig) homomorfi

$$\phi : D_4 \to O(2) \qquad \text{(de ortogonale 2x2-matriser)}$$

ved å plassere kvadratet "gunstig" i forhold til standard koordinatsystemet i xy - planet. Bare matrisene $\phi(a)$ og $\phi(b)$ skal skrives opp. ϕ er faktisk entydig bestemt av disse to. Hvorfor?

(c) Vi lar G operere på seg selv, dvs. gjør G til en G-mengde, via indre automorfier, nemlig

$$G \times G \to G, (g, k) \to gkg^{-1} = i_g(k)$$

Bestem de forskjellige banene (bruk notasjonen fra (a)). Har noen av isotropigruppene orden < 4?

(d) Vis at unionen av de baner som har bare ett element (dvs. er fikspunkt) utgjør en normal og kommutativ undergruppe Z. Bestem også strukturen til gruppa G/Z.

(e) Begrunn hvorfor G ikke kan være isomorf med en produktgruppe $H \times \mathbf{Z}_2$.

Oppgave 4

Vi lager en kvadratisk ramme av fire like lange pinner, og fargelegger hver pinne med en farge. Vi bruker høyst tre forskjellige farger. Hvor mange forskjellige fargelagde rammer kan vi lage?

Oppgave 5

Vis at alle grupper av orden 25 er kommutative. [Hint: Sylows teoremer kan benyttes om ønskelig].

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene eller ved hjelp av tastafon (telefon med stjerne og firkanttast) vil en kunne få opplysninger om sensur i egne fag og emner. Ring 815 48014 og følg de anvisninger som blir gitt. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
DEN ALLMENNVITENSKAPELIGE HØGSKOLEN

Bokmål

Eksamen i : MA 205 - ALGEBRA

Dato : Fredag 8. desember 1995

Varighet : 5 timer
Antall vekttall : 3

Tillatte hjelpemidler:
Ingen

Sensur: Fredag 29. desember 1995

Oppgave 1

La G = alle 2×2 reelle matriser $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ slik at $\det A = ad - bc = 1$.

Da er G en gruppe med matrisemultiplikasjon som binær operasjon. (Dette skal ikke vises).

La

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R},\ a \neq 0 \right\}.$$

og

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbf{R} \right\}.$$

(a) Vis at H og N er undergrupper av G.

(b) Vis at N er normal i H.

Oppgave 2 La $\sigma \in S_8$ være gitt ved

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Skriv σ som et produkt av transposisjoner.

(b) Finn banene til σ i $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

(c) Anta $\sigma \in S_8$ er slik at $\{1, 2, 3\}$ er en bane for σ. Vis at da er ordenen til σ delelig med 3.

Oppgave 3

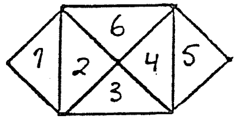
La $H = \{(2n, 2n) \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

(a) Vis at H er en undergruppe av $\mathbf{Z}^2$.

(b) Finn en basis $\{x_1, x_2\}$ for $\mathbf{Z}^2$ slik at $\{2x_1\}$ er en basis for H.

(c) Vis at $\mathbf{Z}^2/H$ er isomorf med $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_2$.

Oppgave 4



Figuren ovenfor er delt i 6 felt.

(a) Hva blir symmetriene (rotasjonene og speilingene) til denne figuren?

Vi skal nå farge hvert felt på brikken rødt, svart eller hvitt.

(b) Hvor mange fargelegginger av brikken får vi når vi ikke skiller mellom fargelegginger som går over i hverandre ved rotasjon eller speiling?

(c) Hvor mange av fargeleggingene fra (b) har presis 1 rødt felt?

Oppgave 5

La G være en gruppe av orden pq der p og q er primtall med

$$2 < p < q < 2p + 1.$$

(a) Vis at G har nøyaktig én p-Sylow undergruppe H og nøyaktig én q-Sylow undergruppe K.

(b) Vis at H og K er normale og $H \cap K = \{e\}$.

(c) Vis at G er isomorf med $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_q$.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
DEN ALLMENNVITENSKAPELIGE HØGSKOLEN

Bokmål

Eksamen i : MA 05 - ALGEBRA

Dato : Fredag 19. mai 1995

Varighet : 5 timer
Antall vekttall : 3

Tillatte hjelpemidler:
Ingen

Sensur: Fredag 9. juni 1995

Oppgave 1

La $G = \{0, 2, 4, 6, 8, 12\}$. For $a, b \in G$ definerer vi at $a * b$ skal være lik resten når $a + b - 5ab$ divideres med 14. $*$ blir en assosiativ binæroperasjon på G.

(a) Vis at G med denne binæroperasjonen er en gruppe.

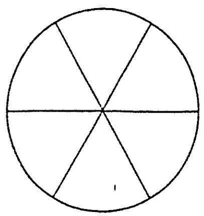
(b) Vis at G er isomorf med $\mathbf{Z}_6$.

Oppgave 2

(a) Finn alle ikke-isomorfe abelske grupper av orden 100.

(b) Finn ordenen til elementet $(6, 10, 25)$ i gruppa $\mathbf{Z}_8 \times \mathbf{Z}_{14} \times \mathbf{Z}_{30}$.

Oppgave 3



En sirkelskive er delt i 6 like store sektorer som på figuren.

(a) Vi har 6 forskjellige farger til disposisjon.

På hvor mange forskjellige måter kan vi fargelegge figuren, når vi ikke skiller mellom fargelegginger som går over i hverandre ved rotasjon om sirkelens sentrum?

(b) I hvor mange av fargeleggingene fra (a) vil alle feltene ha forskjellige farger?

Oppgave 4

(a) Finn alle undergrupper av S_3. Hvilke av disse er Sylow undergrupper av S_3?

(b) La G være en endelig gruppe. Vis at hvis H er en undergruppe av G der $[G : H] = 2$, så er H en normal undergruppe av G.

Oppgave 5

La G være en gruppe av orden pq, der p og q er primtall og $p < q$.

(a) Gi et bevis for at G ikke er simpel.

(b) Anta at $q \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. Gi et bevis for at G da er abelsk.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
DEN ALLMENNVITENSKAPELIGE HØGSKOLEN

Eksamen i : **MA 05 - ALGEBRA**

Dato : **Torsdag 8. desember 1994**

Varighet : 5 timer
Antall vekttall : 3

Tillatte hjelpemidler:
Ingen

Sensur: Fredag 23. desember 1994

Oppgave 1

La G være en gruppe, a et element i G og la $H_a = \{g \in G | ag = ga\}$.

(a) Vis at H_a er en undergruppe av G.

(b) La G være gruppen S_3 (bestående av alle permutasjoner av $\{1,2,3\}$) og la $a = (12)$. Finn H_a i dette tilfellet, og avgjør om H_a er en normal undergruppe av S_3.

Oppgave 2

Finn elementene av orden 2 og av orden 4 i gruppen $Z_2 \times Z_4 \times Z_3$, og finn alle undergruppene av orden 4.

Oppgave 3

La G være en gruppe av orden 77. Vis at hver undergruppe H av G der $H \neq G$ er syklisk.

Oppgave 4

La G være en gruppe og la a være et element i G. Vis at avbildningen $i_a : G \to G$ gitt ved $i_a(g) = aga^{-1}$ er en gruppehomomorfi. Er i_a en gruppeisomorfi?

Oppgave 5

La som vanlig S_4 være gruppen av permutasjoner av $\{1,2,3,4\}$ og A_4 undergruppen bestående av de like permutasjonene.

(a) Finn elementene i A_4 av orden henholdsvis 2, 3 og 4 (der det fins noen).

(b) Finn alle undergruppene av orden 3 og av orden 4 i A_4.

(c) Avgjør hvilke av undergruppene av A_4 i (b) som er normale undergrupper.

(d) Vis at hvis H er en undergruppe av A_4 som inneholder et element av orden 3 og et element av orden 2, så må $H = A_4$, og vis at A_4 ikke har noen undergruppe av orden 6.

(e) Vis at hvis G er en gruppe med 12 elementer, så er G ikke en enkel gruppe.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
Den allmennvitenskapelige høgskolen

Bokmål

Eksamen i : **MA 05 ALGEBRA**

Dato : **Onsdag 15. desember 1993**

Varighet : 5 timer
Antall vekttall : 3
Tillatte hjelpemidler : Ingen

Sensur : **Tirsdag 11. januar 1994**

Oppgavesettet er på 2 sider og består av 5 oppgaver.

Oppgave 1.

Vi setter $G = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$. G består altså av de naturlige tall mindre enn 15 som ikke er delelige med 3 eller 5. For $a, b \in G$ defineres $a * b$ som resten når ab divideres på 15.

a) Vis at $*$ er en binær operasjon på G og at G blir en gruppe under denne operasjonen. (Du kan anse som kjent at $*$ blir assosiativ.)

b) Finn ordenen til de enkelte elementer i G.

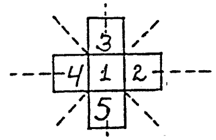
c) Hvilken kjent gruppe er G isomorf med?

Oppgave 2.

Bestem – på isomorfi nær – automorfigruppen til $\mathbf{Z}_{10}$.

Oppgave 3.

Et kors er sammensatt av 5 kvadrater som vist på figuren under.



a) Finn elementene i undergruppen G av S_5 bestående av de permutasjonene av enkeltkvadratene som oppstår ved følgende operasjoner: Rotasjoner 0, 90, 180 og 270 grader om aksen gjennom korsets sentrum, (aksen er vinkelrett på planet korset ligger i), samt speilingene om de 4 stiplede aksene på figuren. Hvert element skal angis som et produkt av disjunkte sykler.

b) Vi kan nå fargelegge hvert enkelt av korsets kvadrater (samme farge på begge sider av et enkelt kvadrat) med en av 3 farger. Hvor mange forskjellige fargelegninger av korset får vi når vi ikke skiller mellom fargelegninger som går over i hverandre ved rotasjonene og speilingene fra G?

Oppgave 4.

La H og K være normale undergrupper av en gruppe G og anta at $H \subseteq K$. Vi forsøker å definere en avbildning $\phi : G/H \to G/K$ ved $\phi(aH) = aK$, $a \in G$.

a) Vis at ϕ er veldefinert og at ϕ er en homomorfi.

b) Vis at $(G/H)/(K/H) \simeq G/K$

Oppgave 5.

a) La H og K være normale undergrupper av en gruppe G med $H \cap K = \{e\}$. Vis at $hk = kh$ for alle $h \in H$, $k \in K$.

b) Under samme forutsetning som i a) defineres $\phi : H \times K \to G$ ved $\phi(h, k) = hk$. Vis at ϕ er en injektiv (en-til-en) homomorfi.

c) La G være en endelig gruppe av orden $p^s q^t$ der p og q er primtall, $p \neq q$, $s \geq 1, t \geq 1$. Anta at G kun har en Sylow-p-undergruppe H og kun en Sylow-q-undergruppe K. Vis at G er isomorf med det direkte produktet $H \times K$.

d) Vis at konklusjonen i c) bryter sammen hvis vi svekker kravet om at det bare skulle være en Sylow-p-undergruppe og bare en Sylow-q-undergruppe.

MERK. Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
DEN ALLMENNVITENSKAPELIGE HØGSKOLEN
INSTITUTT FOR MATEMATIKK OG STATISTIKK

Bokmål

EKSAMEN I MA 05 - ALGEBRA

Dato: Onsdag 2. desember 1992. Ant. timer: 5
Antall vekttall: 3 Tillatte hjelpemidler:
Antall sider: 4 Lommeregner

Sensur: Onsdag 16. desember 1992.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensur ved å oppsøke sensuroppslagene.

Eksamenskontoret eller instituttet vil ikke kunne svare på telefonhenvendelser om sensur.

Oppgave 1

La $G = \{0,1,2,3,4,5\}$ og definer $*$ på G ved

$$x * y = [x + (-1)^x y] \pmod 6$$

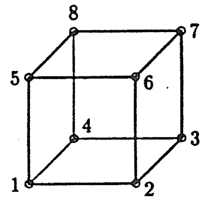
Da er $*$ assosiativ. (Skal ikke vises.)

a) Vis at G er en gruppe.

b) Med hvilken kjent gruppe er G isomorf? Grunngi svaret.

Oppgave 2

På en kube er det plassert perler i alle hjørnene. Gruppen G framkommer ved at vi kan rotere kuben 180° om hver av de tre aksene som går gjennom midtpunktet på to motstående sideflater.



a) Hvor mange element har G, og med hvilken kjent gruppe er G isomorf?

b) Finn banen til hjørnet markert med 1.

c) Perlene skal nå fargelegges. Vi har 4 farger til rådighet. På hvor mange forskjellige måter kan perlene fargelegges når vi ikke skiller mellom fargelegginger som går over i hverandre ved en av rotasjonene beskrevet over?

Oppgave 3

La p være et odde primtall, og la faktorgruppen

$$G = (\mathbf{Z}_{p^2} \times \mathbf{Z}_{2p}) / \langle (p,p) \rangle$$

være gitt.

a) Bestem ordenen til gruppen G.

b) Bestem ordenen til elementet $(1,1) + \langle (p,p) \rangle$ i G.

Oppgave 4

La G være en gruppe. Senteret til $G, Z(G)$, er da gitt ved

$$Z(G) = \{ g \in G : gx = xg \ \ \forall x \in G \}$$

Det er kjent at $Z(G)$ er en undergruppe av G.

a) Vis at $Z(G)$ er en *normal* undergruppe av G.

Det er kjent at mengden av automorfier av G, Aut$G$, er en gruppe med sammensetning av automorfier som gruppeoperasjon. En *indre* automorfi, i_g, er en automorfi av form $i_g(x) = gxg^{-1}$, der $g \in G$. Sett

$$\mathrm{In}G = \{\, i_g : g \in G \,\}$$

b) Vis at InG er en undergruppe av Aut$G$.

c) Bruk 1. isomorfi-teorem til å vise at

$$G/Z(G) \simeq \mathrm{In}G$$

d) Finn senteret til gruppen D_4 og bruk dette til å bestemme InD_4 opp til isomorfi.

Gruppetabell for D_4:

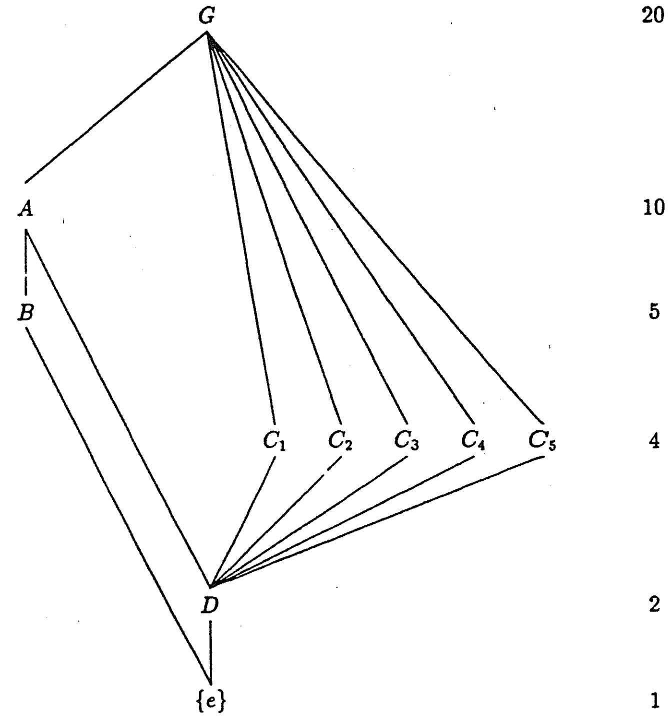
	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Oppgave 5

La G være en gruppe av orden 20 med lattice-diagram som på figur. Tallene til høyre angir hvilken orden undergruppene til G har. (To undergrupper har samme orden hvis de ligger på samme nivå i diagrammet).

a) Avgjør om G er abelsk og bestem de undergruppene som er normale i G.

b) Anta at vi har fått utdelt lattice-diagrammet uten angivelse av ordenen på undergruppene. Vis at G allikevel må ha orden 20.



UNIVERSITETET I TRONDHEIM
DEN ALLMENNVITENSKAPELIGE HØGSKOLEN
INSTITUTT FOR MATEMATIKK OG STATISTIKK

Bokmål

EKSAMEN I MA 05 - ALGEBRA

Dato: 2 desember 1991
Antall vekttall: 3
Antall sider: 2
Antall vedlegg: 0

1 dag av 1. Ant. timer: 5

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator

Sensur: 20. desember 1991.

OPPGAVE 1.

a) Skriv permutasjonen $a \in S_8$ definert ved

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

som et produkt av disjunkte (og dermed kommuterende) sykler.

b) Bestem ordenen til a.

OPPGAVE 2.

a) Vis at ingen gruppe G av orden 200 er enkel.

b) La G være en ikke-triviell gruppe (som i utgangspunktet ikke nødvendigvis er av endelig orden). Vis at dersom G kun har de trivielle undergruppene $\{e\}$ og G, så er G endelig og av orden p, der p er et primtall.

[Hint: Betrakt sykliske undergrupper.]

OPPGAVE 3.

a) På hvor mange forskjellige måter kan man fargelegge sidene til en likesidet trekant når man har 5 farger til disposisjon?

b) På hvor mange forskjellige måter kan man fargelegge sidene til et kvadrat ("regulær firkant"), slik at hver side har forskjellig farge, når men har 5 farger til disposisjon?

OPPGAVE 4.

a) Skriv ned alle ikke-isomorfe abelske grupper av orden 36.

b) Bestem ordenen til $a = (8, 4, 18)$ i $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{24}$.

OPPGAVE 5.

La G være en endelig gruppe av orden p^2q , der p og q er distinkte primtall.

a) Vis at dersom $p > q$ så har G en normal undergruppe av orden p^2.

b) Vis at dersom $2 < p < q$ så har G en normal undergruppe av orden q.

c) Vis at kommutatorundergruppen H' til H er inneholdt i hver Sylow 7-undergruppe til H, der H er en gruppe av orden 245.

d) La K være en gruppe av orden 12. Vis at K ikke er enkel.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensur ved å oppsøke sensuroppslagene. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
DEN ALLMENNVITENSKAPELIGE HØGSKOLEN
INSTITUTT FOR MATEMATIKK OG STATISTIKK

Bokmål

EKSAMEN I MA 05 - ALGEBRA

Dato: 3 desember 1990
Antall vekttall: 3
Antall sider: 2
Antall vedlegg: 0

1 dag av 1. Ant. timer: 5

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator

Sensur: 20. desember 1990.

Oppgave 1.

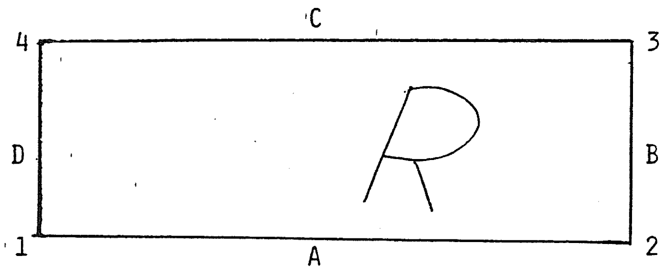
La $G = S_3$ (gruppen av alle permutasjoner av de tre symbolene 1, 2 og 3).

La videre N være den sykliske undergruppen av G generert av 3-sykelen $a = (1\ 2\ 3)$, dvs. $N = < a >$. Tilsvarende, la $H = < b >$, der b er transposisjonen $(1\ 2)$.

a) Vis at N er en normal undergruppe av G.

b) Vis at H ikke er en normal undergruppe av G.

Oppgave 2.



La V være symmetrigruppen til rektanglet R med hjørnene 1, 2, 3 og 4 og sidene A, B, C og D, som vist i figuren over.

a) Vis ved hjelp av en figur de fire elementene i V og skriv ned gruppetabellen for V.

b) Mengden $X = \{1, 2, 3, 4, A, B, C, D\}$ er på en naturlig måte en V-mengde. Finn banen til hjørnet 1 og isotropigruppen til siden A.

c) Sidene til R skal fargelegges med fire forskjellige farger. Hvor mange slike fargelegginger finnes det, idet man ikke skiller mellom slike som føres over i hverandre ved symmetrigruppen V ?

d) Hvor mange fargelegginger finnes det dersom man krever at alle sidene har forskjellige farger?

Oppgave 3.

La G være en gruppe av orden 175 med enhetselement e.

a) Vis at G inneholder to normale (ikke-trivielle) undergrupper K og N slik at $K \cap N = \{e\}$

b) Vis at G/K og G/N er abelske.

c) Skriv ned alle (ikke-isomorfe) grupper av orden 175.

(Følgende opplysning blir oppgitt: En gruppe av orden p^2, p primtall, er abelsk.)

Oppgave 4.

La p og q være to forskjellige primtall. En endelig gruppe G har én undergruppe av orden q og fem undergrupper av orden p, og ellers ingen ikke-trivielle undergrupper. Ved å bruke Sylow-teoremene skal man gjøre følgende:

a) Finn ordenen til G uttrykt ved p og q.

b) Vis at G ikke er en simpel gruppe.

c) Forklar hvorfor G ikke kan være en abelsk gruppe.

d) Vis at $p = 2$ og $q = 5$.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensur ved å oppsøke sensuroppslagene. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
Den allmennvitenskapelige høgskolen

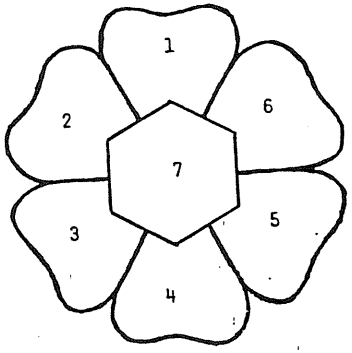
Bokmål

Eksamen i : Ma 05 - ALGEBRA

Dato: 4. desember 1989 1 dag av 1. Ant. timer: 5
Antall vekttall: 3 Tillatte hjelpemidler:
Antall sider: 3 Kalkulator
Antall vedlegg: 0

Sensur: 20. desember 1989

Oppgave 1



Figuren viser en forenklet utgave av emblemet for Universitetet i Trondheim, AVH.
Vi vil nå fargelegge de 7 feltene i emblemet med alle regnbuens 7 farger (rød, orange, gul, grønn, blå, indigo, fiolett).

(a) Hvor mange forskjellige fargelegginger får vi, når vi ikke skjelner mellom fargelegginger som går over i hverandre ved rotasjoner omkring emblemets senter?

(b) Hvor mange av fargeleggingene i (a) er slik at alle 7 felter har forskjellig farge?

Oppgave 2

(a) Hva er den minste orden en gruppe G kan ha dersom G ikke er abelsk? Svaret skal begrunnes.

(b) Finn alle undergrupper av S_3, og tegn Lattice diagram.

(c) Vis at enhver undergruppe av en syklisk gruppe er syklisk.

(d) Gjelder "det omvendte" av (c)?
Dvs.:
Dersom G er en gruppe slik at enhver <u>ekte</u> undergruppe av G er syklisk, vil da G selv være syklisk?
Svaret skal begrunnes.

Oppgave 3

(a) La $\phi : G \to G'$ være en gruppe - homomorfi.
Vis at dersom $|G|$ er endelig, så er også $|\phi(G)|$ endelig, og $|\phi(G)|$ er en divisor i $|G|$.

(b) Finn alle homomorfier: $\phi : Z_5 \to D_4$.

Oppgave 4

(a) Vis at A_n er en normal undergruppe av S_n.

(b) Generaliser resultatet fra (a) ved å vise flg.: Dersom G er en endelig gruppe, og H er en undergruppe av G slik at $(G : H) = 2$, så er H normal i G.

Oppgave 5

(a) Formuler fundamentalteoremet for endelig - genererte abelske grupper.
Finn deretter alle abelske grupper, opp til isomorfi, av orden 24.

(b) Hvilken av gruppene fra (a) er isomorf med

$$Z_8 \times Z_{12} / \langle(4,3)\rangle \quad ?$$

Svaret skal begrunnes.

(c) Vis at ingen gruppe av orden 96 er simpel.

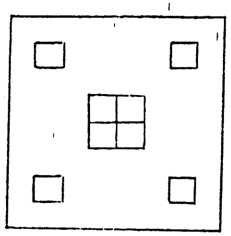
MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensur ved å oppsøke sensuroppslagene.
Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
Den allmennvitenskapelige høgskolen

Bokmål

Eksamen i	:	Ma 05 Algebra
Dato	:	5. desember 1988
Eksamenstid	:	5 timer
Vekttall	:	3
Antall sider i oppgavesettet	:	4
Tillatte hjelpemidler	:	Kalkulator
Sensurdato	:	22. desember 1988

Oppgave 1



Figuren viser mønsteret til et vevet teppe som skal lages i 2 forskjellige farger, sort og hvit.
Det er 9 felt som skal farges.

a) Finn elementene i gruppa G av permutasjoner som tar ekvivalente fargelegginger over i hverandre. Det er tillatt å snu baksiden frem, da bildet er identisk på begge sider.

b) Finn antall forskjellige mønstre når vi ikke skiller mellom mønstre som går over i hverandre ved permutasjonene i G.

c) Hvor mange forskjellige mønstre får vi hvis bakgrunnen skal være rød og de andre feltene kan være sorte eller hvite?

Oppgave 2

a) Finn alle abelske grupper (opp til isomorfisme) av orden $(15)^3$.
Finn torsjonskoeffisientene til gruppene.

Fortsetter:

b) Vis at alle grupper av orden $(15)^3$ har en normal undergruppe av orden 125.

Oppgave 3

a) Det eksisterer en gruppe G av orden 8 generert av to elementer x og y slik at $x^4=y^2=e$ (enhetselementet) og $xy=yx^3$.
Vis at $G=\{x^iy^j \mid i\in\{0,1,2,3\}$ og $j\in\{0,1\}\}$.
Skriv ut alle elementene i G.
(Hint: Vis at elementene x^iy^j, $i\in\{0,1,2,3\}$, $j\in\{0,1\}$ er forskjellige).

b) Finn alle undergruppene til G og tegn lattice-diagrammet for G.

c) Vis at undergruppen $\langle x\rangle \leq G$ er normal i G.
Hvilken kjent gruppe er $G/\langle x\rangle$ isomorf med?

d) Vis at $\langle x^2\rangle \leq G$ er normal i G. Finn restklassene til $\langle x^2\rangle$, og vis at $G/\langle x^2\rangle$ er abelsk.

e) Finn alle abelske grupper av orden 4 (opp til isomorfisme).
Hvilken av disse er isomorf med $G/\langle x^2\rangle$? Svaret skal begrunnes.

f) Vis at gruppen G eksisterer.
(Hint: La $G \leq S_4$, generert av en 4-sykel og en transposisjon).

Fortsetter:

Oppgave 4

La G være en gruppe og $H \leq G$ (H er en undergruppe av G).
La Γ være mengden av alle høyrerestklassene Hg til undergruppen H i G.

$$\Gamma = \{Hg \mid g \in G\}$$

La $a \in G$. Vi definerer $\varphi_a : \Gamma \to \Gamma$
ved $(Hg)\varphi_a = H(ga)$

a) Vis at φ_a er en - til - en (injektiv) og på (surjektiv) (dvs. φ_a er en permutasjon av restklassene i Γ) .
La S_Γ være permutasjonsgruppen til Γ.

b) Vis at $M = \{\Phi_a \in S_\Gamma \mid a \in G\}$ er en undergruppe av S_Γ.

c) Definér avbildningen $F : G \to M$ ved

$$af = \varphi_a$$

Vis at f er en homomorfi(sme).

d) La $K = \ker f$ være kjernen til f.
Vis at $K \leq H$. Vis at K er normal i G, og at K er unionen av alle undergruppene av H som er normale i G.

e) La $(G:H) = t$ og $(G : K) = n$.
Vis at t/n og $n/(t!)$ (t deler n og n deler t!)

Fortsetter:

f) La $G = S_3$ og $H = \{\rho_0, \mu_1\} = \{(1)(2)(3), (1)(2,3)\}$
Finn K, t og n (definert over), og vis at resultatet i e) stemmer.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensur ved å oppsøke sensuroppslagene.
Eksamenskontoret eller instituttet vil ikke kunne svare på henvendelser om sensur.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
Den allmennvitenskapelige høgskolen

Bokmål

Eksamen i	:	Ma 05 Algebra
Dato	:	11. desember 1987
Eksamenstid	:	5 timer
Vekttall	:	3
Antall sider i oppgavesettet	:	3
Tillatte hjelpemidler	:	Kalkulator
Sensurdato	:	21. desember 1987

Oppgave 1

La p være et primtall og sett

$$G = \{\frac{m}{p^n} | m, n \in \mathbb{Z}\} .$$

a) Vis at G er en gruppe under vanlig addisjon.

b) For $k \in \mathbb{Z}$ definerer vi $\phi_k : G \to G$ ved

$$x\phi_k = p^k x \qquad (x \in G).$$

Vis at ϕ_k er en automorfi.

c) La $\phi : G \to G$ være en automorfi. Vis at $(kx)\phi = (x\phi)k$ for alle $x \in G$, $k \in \mathbb{Z}$, og nytt dette til å vise at

$$(\frac{m}{p^n})\phi = (1\phi)\frac{m}{p^n}$$

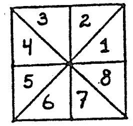
for alle $\frac{m}{p^n} \in G$.

d) Vis at hvis $\phi : G \to G$ er en automorfi, så er $\phi = \phi_k$ eller $\phi = -\phi_k$ for en passende $k \in \mathbb{Z}$.

Fortsetter

Oppgave 2

En kvadratisk brikke er delt inn i 8 felter slik som på figuren nedenfor.



a) Finn undergruppen G av S_8 som svarer til symmetriene (rotasjonene og speilingene) til denne figuren. Hvert element i gruppen skal skrives som produkt av disjunkte sykler.

Vi har nå anledning til å farge hvert felt på brikken rødt, blått eller grønt.

b) Hvor mange fargelegninger av brikken får vi når vi ikke skiller mellom fargelegninger som går over i hverandre ved rotasjon eller speiling ?

c) Hvor mange av fargelegningene fra b) har presis 5 blå felter ?

Oppgave 3

a) Hva vil det si at en gruppe er simpel ?
Gi eksempel (uten bevis) på simple grupper.

b) Vis at ingen gruppe av orden 28 er simpel.

Fortsetter:

Oppgave 4

a) La mengden X ha (de distinkte) elementene a_1, a_2, a_3 og a_4. Vis at

$$(a_1,a_3)(a_1,a_2)(a_3,a_4) = (a_1,a_4)(a_2,a_3)(a_1,a_3) .$$

b) Sett $H = \{I, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ der I er identitetselementet i S_4. Vis at H er en undergruppe av S_4.

c) La $\tau \in S_4$ være en transposisjon. Når vi danner $\tau\sigma$ for en $\sigma \in H$, $\sigma \neq I$, vil

<u>enten</u> τ være lik en av transposisjonene (faktorene) i σ

<u>eller</u> $\tau\sigma$ vil ha samme form som venstresiden i uttrykket i a), (f.eks. er

$$(2,3)(1,2)(3,4) = (2,3)(2,1)(3,4)$$

som svarer til, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$).

Nytt dette til å vise at $\tau H = H\tau$.

d) Vis at for transposisjoner $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k \in S_4, k \geq 1$, er

$$(\tau_1\tau_2\ldots\tau_k)H = H(\tau_1\tau_2\ldots\tau_k)$$

og konkluder at H er normal i S_4.

c) Finn ut hvilken kjent gruppe S_4/H er isomorf med. (Man kan gå ut fra som kjent at det på isomorfi nær bare er to grupper av orden 6.)

MERK ! Sensuren blir gjort kjent ved oppslag. Eksamenskontoret og instituttet vil ikke kunne svare på spørsmål om sensur.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
Den allmennvitenskapelige høgskolen

Bokmål

Eksamen i	:	Ma 05 Algebra
Dato	:	12. desember 1986
Eksamenstid	:	5 timer
Vekttall	:	3
Antall sider i oppgavesettet	:	4
Tillatte hjelpemidler	:	Kalkulator
Sensurdato	:	23. desember 1986

Oppgave 1

La G være mengden av alle tall av formen $a + b\sqrt{2}$ der a og b er rasjonale tall og der $a^2 + b^2 > 0$. La Q^* være mengden av rasjonale tall $\neq 0$.

a) Vis at G er en gruppe under vanlig multiplikasjon av reelle tall.

b) Vis at Q^* er en undergruppe av G.

c) Vis at G ikke er syklisk ved å vise at en syklisk undergruppe av G som inneholder -1, er endelig.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensur ved å oppsøke sensuroppslagene.
Eksamenskontoret eller instituttet vil ikke kunne svare på henvendelser om sensur.

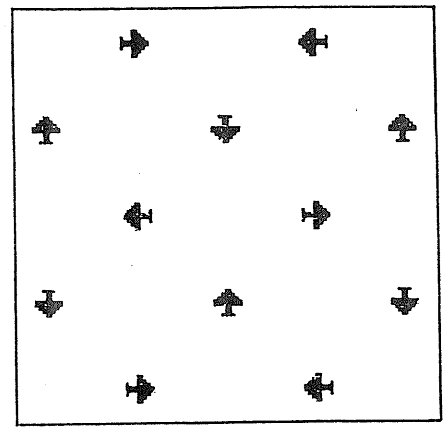
Eksamen i Ma 05
12. desember 1986

BOKMÅL

Fortsetter:

Oppgave 2

Et kvadrat er forsynt med et mønster dannet av 12 like figurer ("sparess") slik som på tegningen nedenfor.



a) Hvilke symmetrier (rotasjoner og speilinger) har dette mønsteret ?
Beskriv den tilsvarende gruppen G og angi hvert element i den som produkt av disjunkte sykler.

Hvilken kjent gruppe er G isomorf med ?

b) Vi tillater nå fargelegging av de enkelte figurene ("sparessene") i mønsteret med rød eller svart farge.

Hvor mange mulige fargelegninger får vi når vi ikke skiller mellom fargelegninger som går over i hverandre ved rotasjoner eller speilinger ?

Fortsetter:

Oppgave 3

La G være en gruppe av orden 561.

a) Vis at G har en normal undergruppe H av orden 11 og en normal undergruppe K av orden 17.

b) Vis at G/H og G/K begge er abelske.

c) Hvor mange grupper fins det - på isomorfi nær - av orden 561 ?

Oppgave 4

La G være en gruppe med normale undergrupper N og M der $M \subset N$ og $|N/M| = 2$. Vi antar videre at G/N er syklisk.

a) Vis at det fins $a \in G$ slik at $G/N = \{a^h N \mid h \in \mathbb{Z}\}$.

La b være et element i N som ikke ligger i M.

b) Vis at for vilkårlig $x \in G$ gjelder

$$xbM = bxM$$

(Vink: En angrepsmåte er f.eks.:
1) Vis at $xbN = bxN$,
2) Vis at $(bx)^{-1}xbM$ er lik M eller bM,
3) Vis at $(bx)^{-1}xbM = bM$ ikke er mulig.)

c) Vis at for vilkårlige $x, y \in G$ gjelder

$$(xM)(ybM) = (xbM)(yM) = xybM$$
$$(xbM)(ybM) = xyM$$

Fortsetter:

Oppgave 4

d) Vis at et vilkårlig element i G/M har formen $a^h M$ eller $a^h bM$ for passende $h \in \mathbb{Z}$.

e) Vis at G/M er abelsk.

f) Gi et eksempel på en gruppe G med normale undergrupper M og N slik at $M \subset N$, $|N/M| = 3$ og slik at G/N er syklisk, men slik at G/M ikke er abelsk.