Vår 2005

Opg 1a

$\mathbb{Z}_8$

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

b) $G = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

$\lvert 1 \rvert = 1$	$\lvert 11 \rvert = 1$
$\lvert 3 \rvert = 4$	$\lvert 13 \rvert = 4$
$\lvert 7 \rvert = 4$	$\lvert 17 \rvert = 4$
$\lvert 9 \rvert = 2$	$\lvert 19 \rvert = 2$

Vi ser at G er en endelig abelsk gruppe, så ved å bruke Fundamental theoremet for endelig genererte abelske grupper (Thm 11.12) vet vi at G må være isomorf med en av gruppene i a). Siden G ikke har noen elementer med orden 8, kan ikke G være isomorf med $\mathbb{Z}_8$. Siden G har elementer av orden 4 kan G heller ikke være isomorf med $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Vi har da at

$$G \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2.$$

Opg 2

$\sigma = (1234)(56)(689) = (1234)(5689)$

$\lvert \sigma \rvert = \text{l.c.m}(4,4) = 4$

$\sigma\tau = (1234)(5689)(136)(2435) = (1489536\,2)$

$\lvert \sigma\tau \rvert = 8$

Elementet $(12)(345)(678910)$ har orden l.c.m. $(2,3,5) = 30$ i S_{10}.

Opg3

La $\varphi: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ være gitt ved

$$\varphi(a,b) = a-b$$

Ser at $\ker\varphi = \langle(1,1)\rangle$, og at φ er en på (onto) avbildning. Har derfor at

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\langle(1,1)\rangle \simeq \mathbb{Z}$$

Opg4

i) La $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} \in H$.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba'+cb' & cc' \end{pmatrix}$$

Siden 3 er et primtall så er $\mathbb{Z}_3$ en kropp.

Vi har at $aa'cc' = ac\,a'c' \neq 0$, så

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} \in H$$

ii) Identiteten i $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ er i H, siden $1\cdot 1 \neq 0$.

iii) La $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in H$. Da er $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = (ac)^{-1}\begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}$

i G, siden $ac \neq 0$. $(ac)^{-1}c \cdot (ac)^{-1}a = (ac)^{-1} \neq 0$ siden $ac \neq 0$, så $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} \in H$.

Viser dermed at H er en undergruppe av G.

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in H$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \notin H$$

$\Rightarrow$ H er ikke normal.

Opg 5

Det er fire vridninger; $G = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$, hvor

ρ_0 = identitet
ρ_1 = vridning $90°$
ρ_2 = vridning $180°$
ρ_3 = vridning $270°$

Vi bruker Burnside's formel, hvor X er alle mulige fargeleggninger, & X dermed er en G-mengde.

$$r = \frac{\sum_{g\in G} |X_g|}{|G|} = \frac{2^9 + 2^3 + 2^5 + 2^3}{4} = 2^7 + 2 + 2^3 + 2$$

$$= 128 + 2 + 8 + 2 = \underline{\underline{140}}$$

Opg 6a

Ser at $\{2,3,4,6,8,9,10\}$ er alle elementene i $\mathbb{Z}_{12}$ som har største felles divisor med 12 ulik 1. Disse elementene vil da være nulldivisorene i $\mathbb{Z}_{12}$.

b) x er et ikke-null element i $\mathbb{R}[x]$. Anta at x har en invers i $\mathbb{R}[x]$, si $f(x)$. Da har vi

$$0 = \deg(1) = \deg(x \cdot f(x)) = \deg(x) + \deg(f)$$
$$= 1 + \deg(f)$$

$\Rightarrow \deg(f) = -1$, en selvmotsigelse siden alle alle elementer i $\mathbb{R}[x]$ har ikke negativ grad.

Øvs 7 (TMA 4150) a

$p(0) = 2$
$p(1) = 2$
$p(2) = 1$

Siden $\deg(p(x)) = 2$, ser vi da at $p(x)$ er irreducibelt.
Vi får da at $\langle p(x) \rangle$ er et maksimalt ideal i
$\mathbb{Z}_3[x]$, så $F = \mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x) \rangle$ må være en kropp.

La $\alpha = x + \langle p(x) \rangle$. Elementene i $\mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x) \rangle$
er på formen $a_0 + a_1\alpha$, hvor $a_i \in \mathbb{Z}_3$.
Vi har da $\left|\mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x) \rangle\right| = 3^2 = \underline{\underline{9}}$.

b

$F \setminus \{0\}$ har 8 elementer

$\langle \alpha \rangle = \{1, \alpha, \alpha+1, 2\alpha+1, 2, 2\alpha, 2\alpha+2, \alpha+2\}$

Ser at $|\langle \alpha \rangle| = |F \setminus \{0\}|$

$\Rightarrow \langle \alpha \rangle = F \setminus \{0\}$, så $F \setminus \{0\}$ er syklisk.

Opg 7 (MA 2201) a

La r være antall undergrupper med 5 elementer.
En undergruppe med 5 elementer må være syklisk, siden 5 er et primtall, og alle elementer ulik den multiplikative enheten må ha orden 5.
En slik undergruppe er dermed en 5-undergruppe.

Siden $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, så vil enhver 5-undergruppe være en Sylow 5-undergruppe. Vi har da at r er antall Sylow 5-undergrupper.

$$r \equiv 1 \pmod 5 \quad , \text{ og } \quad r \mid |G|$$

$$\Rightarrow \underline{r = 1 \text{ eller } r = 6.}$$

b) La s være antall Sylow 3-undergrupper i G.

$$s \equiv 1 \pmod 3 \quad \text{og} \quad s \mid |G|$$

$$\Rightarrow s = 1 \quad \text{eller} \quad s = 10$$

Anta $r = 6$ & $s = 10$. Siden G har 6 Sylow 5-undergrupper, må G ha $6 \cdot 4 = 24$ elementer av orden 5.
Siden G har 10 Sylow 3-undergrupper må G ha $10 \cdot 2 = 20$ elementer av orden 3. Vi har da mer $24 + 20 = 44$ elementer i G, en selvmotsigelse. Så enten er $r = 1$ eller $s = 1$. Når vi bare har en Sylow p-undergruppe, så er denne en normal undergruppe.

$\Rightarrow$ G er ikke simpel.