Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Idun Reiten (992 44 539)

EKSAMEN I ALGEBRA (MA2201)
Bokmål

Lørdag 9. desember 2006
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidler: Godkjent kalkulator HP30S
Sensur: Onsdag 13. desember

Oppgavesettet består av 10 punkter, og alle punkter teller likt. Lykke til!

Oppgave 1

a) Bestem hvor mange ikke-isomorfe abelske grupper det finnes av orden 12, og skriv disse ned.

b) La G være gruppen av enheter i ringen $\mathbb{Z}_{21}$. Skriv ned elementene i G og avgjør hvilken av gruppene i a) G er isomorf med.

Oppgave 2

a) La G være gruppen av inverterbare 2×2-matriser over $\mathbb{R}$ med vanlig matrisemultiplikasjon. La

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \; ; \; a, b, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vis at H er en undergruppe av G.

b) La $H_1 = \{M \in H \mid \det M = 1\}$. Vis at H_1 er en normal undergruppe av H. Avgjør om H_1 er en normal undergruppe av G.

Oppgave 3 Vis at en faktorgruppe av en syklisk gruppe er syklisk.

Oppgave 4 Vis at $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / \langle(1,2)\rangle \simeq \mathbb{Z}$.

Oppgave 5 La $G = (\mathbb{R}, +)$ være gruppen av reelle tall under addisjon. Vis at planet $\mathbb{R}^2$ er en G-mengde når virkningen er gitt ved at man for et reelt tall $\theta \in G$ roterer punktene i planet en vinkel θ (målt i grader) med klokka om origo. For ethvert punkt (a, b) i planet, bestem banen (orbit) til punktet og isotropigruppen $G_{(a,b)}$, som er gitt ved

$$G_{(a,b)} = \{\theta \in G \mid \theta * (a,b) = (a,b)\}\,.$$

Oppgave 6 Gi definisjonen av Eulers ϕ-funksjon, og finn resten vi får når vi deler 5^{1000} på 18.

Oppgave 7 La p være et primtall og $0 \leq a < p$ være et heltall. Vis at $q(x) = x^p - a$ i $\mathbb{Z}_p[x]$ har en lineær faktor i $\mathbb{Z}_p[x]$.

Oppgave 8 La G være en gruppe av orden 30. Vis at G har en normal undergruppe.