Fasit, MA2201-eksamen H06

1a) 2 grupper:

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

b) (Restklassene til) $1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20$

$2^6 \equiv 1 \quad (\Rightarrow 19^6 = (-2)^6 = 1)$

$4^3 = 1 \quad (\Rightarrow 17^6 = (-4)^6 = 1)$

$5^6 = 1 \quad (\Rightarrow 16^6 = (-5)^6 = 1)$

$8^2 = 1 \quad (\Rightarrow 13^2 = (-8)^2 = 1)$

$10^6 = 2^6 \cdot 5^6 = 1 \cdot 1 = 1 \quad (\Rightarrow 11^6 = (-10)^6 = 1)$

$20^2 = (-1)^2 = 1$

$\Rightarrow$ ingen elementer av orden 12

$\Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

2a) • $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$

• $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot\cdot & \cdots \\ 0 & \cdot\cdot \end{pmatrix} \in H$

• $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/ad \\ 0 & 1/d \end{pmatrix} \in H$

b) • $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_1$

• $\det(X \cdot Y) = \det X \cdot \det Y = 1 \cdot 1 = 1$ for $X, Y \in H_1$

$\Rightarrow X \cdot Y \in H_1$ for $X, Y \in H_1$

• $\det(X^{-1}) = \frac{1}{\det X} = \frac{1}{1} = 1$ for $X \in H_1 \Rightarrow X^{-1} \in H_1$ for $X \in H_1$

$\Rightarrow H_1 \leq H$

[La $X \in H$, $Y \in H_1$. Da er $\det(X^{-1}YX) = \frac{1}{\det X} \cdot \det Y \cdot \det X = 1$

Så ($Y \in H_1$ og $X \in H \Rightarrow X^{-1}YX \in H_1$) og H_1 er normal i H.

[$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin H_1 \Rightarrow H_1$ ikke normal i G.

3. $G = \langle a \rangle$, $H \le G$

Vil vise: $G/H = \langle aH \rangle$.

Gitt sideklasse bH. Da er $b = a^k$ for en $k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow bH = a^k H = (aH)^k \in \langle aH \rangle$

$\Rightarrow G/H \subseteq \langle aH \rangle \Rightarrow G/H$ syklisk.

4. $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\varphi(a,b) = 2a - b$

- $\varphi((a,b)+(a',b')) = \varphi(a+a', b+b') = 2(a+a') - (b+b') = 2a - b + 2a' - b'$
$= \varphi(a,b) + \varphi(a',b')$

$\Rightarrow \varphi$ er en homomorfi.

- φ er på (surjektiv): Gitt $a \in \mathbb{Z}$. Da er $\varphi(0,-a) = a$.
- $\ker \varphi = \{(a,b) \mid 2a - b = 0\} = \{(a,b) \mid b = 2a\} = \langle (1,2) \rangle$

$\Rightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} / \langle (1,2) \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

5.
- $0 * (a,b) = (a,b)$ (ingen rotasjon)
- $\theta_1 * (\theta_2 * (a,b)) = \theta_1 * ((a,b)$ rotert θ_2 om origo$)$
$= (a,b)$ rotert $\theta_1 + \theta_2$ om origo
$= (\theta_1 + \theta_2) * (a,b)$

- $p = (0,0) \rightsquigarrow$ bane $= \{(0,0)\}$, $G_{(0,0)} = G$
- $p = (a,b) \neq (0,0) \rightsquigarrow$ bane: sirkel $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)$
(sentrum origo, gjennom p)

$G_{(a,b)} = \{k \cdot 180 \mid k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$.

6. For pos. heltall n:

$\varphi(n)$ = antall pos. heltall $< n$ som er relativt primiske til n.

$\varphi(18) = 6$

$5^{1000} = (5^6)^{166} \cdot 5^4 \equiv 5^4 \equiv (5^2)^2 = 25^2 \equiv 7^2 = 49 \equiv 13 \pmod{18}$

7. $a^p \equiv a \pmod p$.

$\Rightarrow f(a) = a^p - a \equiv a - a = 0 \pmod p$

$\Rightarrow (x-a) \mid x^p - a$

8. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

r = # Sylow 5-undgp = 1 el. 6

s = # Sylow 3-undgp = 1 el 10

$r = 6 \Rightarrow 6 \cdot 4 = 24$ elem. av orden 5
$s = 10 \Rightarrow 10 \cdot 2 = 20$ elem. av orden 3
$\Rightarrow > 30$ elem. i G ↯.

$\Rightarrow r = 1$ eller $s = 1$

For $r=1$ er denne ene Sylow 5-undergruppen H normal, siden $g^{-1}Hg$ også er en Sylow 5-undgp for alle $g \in G$.

(Tilsvarende for $s=1$.)