TMA4150/MA2201 - MIDTSEMESTERPRØVE 2006

Tirsdag 7. mars 2006 - **Bokmål**

Studentnummer: ____________

Prøven består av 10 flervalgsoppgaver. På noen av oppgavene er det mer enn ett riktig svar. Antall riktige svar skal gå fram av oppgaveteksten. Lykke til!

Oppgave 1 Nøyaktig **to** av disse mengdene er grupper under den gitte binære operasjonen. Hvilke?

- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$ under vanlig matrisemultiplikasjon
- ☐ $\mathbb{R}^+$, de positive reelle tall, under $*$, hvor $a * b = \sqrt{ab}$
- ☐ $\{1, 2, 3, 4\}$ under multiplikasjon modulo 5
- ☐ $\mathbb{R}^*$, de reelle tall bortsett fra 0, under $*$, hvor $a * b = \dfrac{a}{b}$

Oppgave 2 Hvor mange ikke-isomorfe abelske grupper av orden 48 finnes det?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 8

Oppgave 3 Hva er ordenen til elementet (3,4,5) i gruppen $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$?

☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 10 ☐ 12

Oppgave 4 La

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 7 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_7$$

Hvilket av uttrykkene under er lik σ, skrevet som et produkt av disjunkte sykler?

- ☐ (13)(672)(64)
- ☐ (13)(2674)
- ☐ (6472)(13)
- ☐ (124)(367)
- ☐ (14)(32)(756)

Oppgave 5 La

$$\tau = (1345) \in S_5$$

Hvor mange venstre restklasser hører til undergruppen $\langle \tau \rangle \leq S_5$ generert av τ?

☐ 4 ☐ 10 ☐ 25 ☐ 30 ☐ 36

Oppgave 6 La $G = \mathbb{Z}_{20}$, den sykliske gruppen av orden 20. Hvor mange ikke-isomorfe undergrupper har G, bortsett fra G selv og den trivielle undergruppen?

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 10

Oppgave 7 Nøyaktig **to** av disse funksjonene er gruppehomomorfier. Hvilke?

☐ $\phi_1 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot), \quad \phi_1(x) = e^x$

☐ $\phi_2 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +), \quad \phi_2(x) = |x|$

☐ $\phi_3 : S_n \to \mathbb{Z}_2, \quad \phi_3(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma \text{ jevn} \\ 1, & \sigma \text{ odde} \end{cases}$

☐ $\phi_4 : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +), \quad \phi_4(x) = x^2$

Oppgave 8 Nøyaktig **to** av følgende utsagn er korrekte. Hvilke?

☐ Hvis $\phi : G \to G'$ er en gruppehomomorfi, og N er en normal undergruppe av G, så er $\phi[N]$ en normal undergruppe av G'.

☐ Hvis G er en abelsk gruppe, og N er en normal undergruppe av G, så er faktorgruppen G/N en abelsk gruppe.

☐ Hvis G er en ikke-abelsk gruppe, og N er en normal undergruppe av G, så er faktorgruppen G/N ikke-abelsk.

☐ Enhver undergruppe H av en gruppe G med indeks $(G : H) = 2$ er en normal undergruppe.

Oppgave 9 Vi skal farge hjørnene i en likesidet trekant. Vi har 5 farger tilgjengelig, som vi kan bruke så mange ganger vi vil. Anta foreløpig at hjørnene er merket. La X være mengden av mulige fargelegginger med merkede hjørner. Hvor mange elementer i X blir liggende i ro når vi speiler trekanten om normalen fra ett av hjørnene ned på den motstående siden? (Det vil si: Hva er $|X_{\mu_1}|$ når μ_1 er speiling om den aktuelle linjen?)

☐ 5 ☐ 10 ☐ 20 ☐ 25 ☐ 30

Oppgave 10 Hvor mange forskjellige måter kan vi fargelegge hjørnene i trekanten i oppgave 9 på, når hjørnene ikke er merkede? To måter regnes som like om vi kan få den ene fra den andre ved å rotere og snu trekanten i rommet.

☐ 20 ☐ 25 ☐ 35 ☐ 90 ☐ 210

(Hint: Dersom G er en endelig gruppe og X er en endelig G-mengde, er Burnsides formel gitt ved

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X_g|,$$

der r er antall baner (orbits).)