TMA4150/MA2201 - MIDTSEMESTERPRØVE 2007

Mandag 12. mars 2007 - **Bokmål**

Studentnummer: ___________

Prøven består av 10 flervalgsoppgaver. På noen av oppgavene er det mer enn ett riktig svar, og antall riktige svar skal gå fram av oppgaveteksten. Sett **nøyaktig** så mange kryss som det er riktige svar. Lykke til!

Oppgave 1 Hvilke **to** av følgende mengder er grupper under den gitte binære operasjonen?

- ☐ Mengden av 3×3-matriser med reelle koeffisienter og positiv determinant under matrisemultiplikasjon
- ☐ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ under multiplikasjon modulo 6
- ☐ $(\mathbb{R}, *)$, der $*$ er gitt ved $a * b = a - b$
- ☐ Mengden av odde permutasjoner i S_5 under vanlig produkt av permutasjoner
- ☐ $(\mathbb{R}_{>0}, *)$, de positive reelle tall, der $a * b = \frac{ab}{2}$

Oppgave 2 Hvor mange ikke-isomorfe abelske grupper finnes det av orden 100?

☐ 1 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 9 ☐ 15

Oppgave 3 Hva er ordenen til elementet $(6, 8, 12)$ i gruppen $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15}$?

☐ 3 ☐ 5 ☐ 12 ☐ 15 ☐ 18

Oppgave 4 Gruppen $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{10}$ er isomorf med nøyaktig **én** av disse gruppene. Hvilken?

- ☐ $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
- ☐ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$
- ☐ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{360}$
- ☐ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
- ☐ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{24}$

Oppgave 5 Hvilke **tre** av avbildningene under er gruppehomomorfier?

- ☐ $\phi_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad \phi_1(a, b) = a - b$
- ☐ $\phi_2 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +), \quad \phi_2(x) = \sqrt{x}$
- ☐ $\phi_3 : S_4 \to S_5, \quad \phi_3\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & 3 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$
- ☐ $\phi_4 : S_5 \to S_5, \quad \phi_4(\sigma) = \sigma^{-1}$
- ☐ $\phi_5 : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot), \quad \phi_5(x) = |x|$

Oppgave 6 La

$$\sigma = (143)(25) \in S_6$$

Hvor mange venstre restklasser hører til undergruppen $\langle \sigma \rangle \leq S_6$ generert av σ?

☐ 5 ☐ 6 ☐ 90 ☐ 120 ☐ 144

Oppgave 7 Hvilke **to** av utsagnene er sanne?

- ☐ Hvis G er en gruppe av orden 77, og N er en normal undergruppe av G (der $\{e\} \neq N \neq G$), så er faktorgruppen G/N syklisk.
- ☐ Hvis H_1 og H_2 er undergrupper av en gruppe G, så er også unionen $H_1 \cup H_2$ en undergruppe av G.
- ☐ Hvis $\phi : G \to G'$ er en vilkårlig homomorfi, og $a \in G$ har orden n, så har $\phi(a) \in G'$ også orden n.
- ☐ Antall undergrupper i S_3, bortsett fra $\{e\}$ og S_3 selv, er 4.

Oppgave 8 La $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ være gruppen av inverterbare 2×2-matriser med reelle koeffisienter under matrisemultiplikasjon. La H være den normale undergruppen

$$H = \{X \in G \mid \det(X) = 1\}$$

Faktorgruppen G/H er isomorf med nøyaktig **én** av gruppene under. Hvilken?

- ☐ $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, de positive reelle tall under multiplikasjon
- ☐ $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, de reelle tall $\neq 0$ under multiplikasjon
- ☐ $(\mathbb{R}, +)$, de reelle tall under addisjon
- ☐ $(\mathbb{C}, +)$, de komplekse tall under addisjon
- ☐ $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, de komplekse tall $\neq 0$ under multiplikasjon

Oppgave 9 La G være en gruppe og $H \leq G$ en undergruppe. La V_H være mengden av venstre restklasser som hører til H. Nøyaktig **ett** av argumentene under er et riktig bevis for at V_H er en G-mengde under $*$ når $g * (xH) = (gx)H$. Hvilket?

- ☐ Hvis $yH = xH$, så er $y = hx$ for en $h \in H$, så $g*(yH) = g*(hxH) = g*(xh'H) = g*(xH)$ (hvor $h' \in H$), så virkningen er veldefinert. Videre er $e*(xH) = (ex)H = (xH)$, og $g_1 * (g_2 * (xH)) = g_1 * ((g_2 x)H) = (g_1 g_2 x)H = (g_1 g_2) * (xH)$, så kravene for gruppevirkning er tilfredsstilt.
- ☐ Hvis $yH = xH$, så er $y = xh$ for en $h \in H$, og $g * (yH) = (gy)H = (gxh)H = (gx) * (hH) = (gx) * H = (gx)H = g * (xH)$, så virkningen er veldefinert. Dessuten har vi $e * (xH) = (ex)H = xH$ og $g_1 * (g_2 * (xH)) = g_1 * ((g_2 x)H) = (g_1 g_2 x)H = (g_1 g_2) * (xH)$ for alle $g_1, g_2 \in G$, så den tilfredsstiller kravene for en gruppevirkning.
- ☐ Hvis $yH = xH$, så er $y = xh$ for en $h \in H$, og $g * (yH) = g * (xhH) = g * (xH)$, så virkningen er veldefinert. Vi har også at $g_1 * (g_2 * (xH)) = g_1 * (g_2 x)H = (g_1 g_2 x)H = (g_2 g_2) * (xH)$, og $g * (xy)H = g * ((xH) \cdot (yH)) = (gx)H \cdot (gy)H = (g * (xH)) \cdot (g * (yH))$. Dermed er kravene for en gruppevirkning tilfredsstilt.

Oppgave 10 På hvor mange forskjellige måter kan vi fargelegge hjørnene i et kvadrat, når vi har fire farger tilgjengelig og kan bruke hver farge så mange ganger vi vil? To måter regnes som like dersom vi ikke kan se forskjell på dem når kvadratet kan bevege seg fritt i rommet.

☐ 12 ☐ 55 ☐ 60 ☐ 92 ☐ 256

Tips: Du kan bruke Burnsides formel, som er gitt ved

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X_g|$$