TMA4150/MA2201 - MIDTSEMESTERPRØVE 2007

Måndag 12. mars 2007 - **Nynorsk**

Studentnummer: ____________

Det er 10 fleirvalsoppgåver i prøva. Det er meir enn eitt rett svar på nokre av oppgåvene, og kor mange rette svar det er skal vere klart ut frå oppgåveteksten. Du skal setje **nøyaktig** så mange kryss som det er rette svar. Lykke til!

Oppgåve 1 Nøyaktig **to** av mengdene under er grupper med den binære operasjonen som står. Kryss av for dei.

- ☐ Mengda av 3×3-matriser med reelle koeffisientar og positiv determinant, med matrisemultiplikasjon
- ☐ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ med multiplikasjon modulo 6
- ☐ $(\mathbb{R}, *)$, der $a * b = a - b$
- ☐ Mengda av odde permutasjonar i S_5 med vanleg produkt av permutasjonar
- ☐ $(\mathbb{R}_{>0}, *)$, dei positive reelle tala, der $a * b = \frac{ab}{2}$

Oppgåve 2 Kor mange ikkje-isomorfe abelske grupper med orden 100 finst det?

☐ 1 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 9 ☐ 15

Oppgåve 3 Kva er ordenen til elementet $(6, 8, 12)$ i gruppa $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15}$?

☐ 3 ☐ 5 ☐ 12 ☐ 15 ☐ 18

Oppgåve 4 Gruppa $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{10}$ er isomorf med nøyaktig **ei** av gruppene under. Kva for ei?

- ☐ $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
- ☐ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$
- ☐ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{360}$
- ☐ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
- ☐ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{24}$

Oppgåve 5 Nøyaktig **tre** av funksjonane under er gruppehomomorfiar. Kryss av for dei.

- ☐ $\phi_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad \phi_1(a, b) = a - b$
- ☐ $\phi_2 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +), \quad \phi_2(x) = \sqrt{x}$
- ☐ $\phi_3 : S_4 \to S_5, \quad \phi_3\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & 3 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$
- ☐ $\phi_4 : S_5 \to S_5, \quad \phi_4(\sigma) = \sigma^{-1}$
- ☐ $\phi_5 : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot), \quad \phi_5(x) = |x|$

Oppgåve 6 La

$$\sigma = (143)(25) \in S_6$$

Kor mange venstre restklasser høyrer til undergruppa $\langle \sigma \rangle \leq S_6$, som er generert av σ?

☐ 5 ☐ 6 ☐ 90 ☐ 120 ☐ 144

Oppgåve 7 **To** av påstandane er sanne. Kryss av for dei.

- ☐ Dersom G er ei gruppe med orden 77, og N er ei normal undergruppe av G (der $\{e\} \neq N \neq G]$), så er faktorgruppa G/N syklisk.
- ☐ Dersom H_1 og H_2 er undergrupper av ei gruppe G, så er og unionen $H_1 \cup H_2$ ei undergruppe av G.
- ☐ Dersom $\phi : G \to G'$ er ein vilkårleg homomorfi, og $a \in G$ har orden n, så har og $\phi(a) \in G'$ orden n.
- ☐ Talet på undergrupper i S_3, når vi ikkje rekner med $\{e\}$ og S_3 sjølv, er 4.

Oppgåve 8 La $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ vere gruppa av inverterbare 2×2-matriser med reelle koeffisientar, med matrisemultiplikasjon. La H vere

$$H = \{X \in G \mid \det(X) = 1\},$$

som er ei normal undergruppe. Faktorgruppa G/H er isomorf med nøyaktig **ei** av gruppene under. Kva for ei?

- ☐ $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, dei positive reelle tala med multiplikasjon
- ☐ $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, dei reelle tala $\neq 0$ med multiplikasjon
- ☐ $(\mathbb{R}, +)$, dei reelle tala med addisjon
- ☐ $(\mathbb{C}, +)$, dei komplekse tala med addisjon
- ☐ $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, dei komplekse tala $\neq 0$ med multiplikasjon

Oppgåve 9 La G vere ei gruppe og $H \leq G$ ei undergruppe. La V_H vere mendga av venstre restklasser som høyrer til H. Nøyaktig **eitt** av argumenta under er eit rett bevis for at V_H er ei G-mengd når $g * (xH) = (gx)H$. Kva for eit?

- ☐ Dersom $yH = xH$, så er $y = hx$ for ein $h \in H$, og $g * (yH) = g * (hxH) = g * (xh'H) = g * (xH)$ (der $h' \in H$), så operasjonen er veldefinert. Vidare er $e * (xH) = (ex)H = (xH)$, og $g_1 * (g_2 * (xH)) = g_1 * ((g_2x)H) = (g_1g_2x)H = (g_1g_2) * (xH)$, så krava for gruppeoperasjon er tilfredsstilt.
- ☐ Dersom $yH = xH$, så er $y = xh$ for ein $h \in H$, og $g*(yH) = (gy)H = (gxh)H = (gx)*(hH) = (gx)*H = (gx)H = g*(xH)$, så operasjonen er veldefinert. Dessutan har vi $e*(xH) = (ex)H = xH$ og $g_1 * (g_2 * (xH)) = g_1 * ((g_2x)H) = (g_1g_2x)H = (g_1g_2) * (xH)$ for alle $g_1, g_2 \in G$, så den tilfredsstiller krava for ein gruppeoperasjon.
- ☐ Dersom $yH = xH$, så er $y = xh$ for ein $h \in H$, og $g * (yH) = g * (xhH) = g * (xH)$, så operasjonen er veldefinert. Vi har og at $g_1 * (g_2 * (xH)) = g_1 * (g_2x)H = (g_1g_2x)H = (g_2g_2) * (xH)$, og $g * (xy)H = g * ((xH) \cdot (yH)) = (gx)H \cdot (gy)H = (g * (xH)) \cdot (g * (yH))$. Altså er krava for ein gruppeoperasjon tilfredsstilt.

Oppgåve 10 Vi skal farge hjørna i eit kvadrat. Vi har fire fargar å bruke, og vi kan bruke kvar farge så mange gonger vi ønskjer. Kor mange ulike måtar kan vi farge hjørna på? Vi seier at to måter er like dersom vi ikkje kan sjå forskjell på dei når kvadratet kan bevege seg fritt i rommet.

☐ 12 ☐ 55 ☐ 60 ☐ 92 ☐ 256

Tips: Du kan bruke Burnside sin formel, som er

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X_g|$$