Faglig kontakt under eksamen: Carl Fredrik Berg
Telefon: 97 50 55 85

# TMA4150 Algebra og tallteori

Onsdag 25. mai 2005
Kl. 9-13

Hjelpemidler: Godkjent kalkulator HP30S.
Alle svar skal begrunnes.

Sensur: 10. juni 2005

**1**

**a)** Finn alle abelske grupper med 8 elementer, opp til isomorfi.

**b)** La $G$ være gruppen av enheter i den kommutative ringen $\mathbb{Z}_{20}$. Skriv ned alle elementene i $G$, og avgjør hvilken av gruppene i (a) som $G$ er isomorf med.

**2**

**a)** La $\sigma = (1\,2\,3\,4)\,(5\,6)\,(6\,8\,9)$ og $\tau = (1\,3\,6)(2\,4\,3\,5)$ være elementer i gruppen $S_{10}$ av permutasjoner av $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$. Finn ordenen til $\sigma$ og $\sigma\tau$. Finn et element av orden 30 i $S_{10}$.

**3**

Vis at faktorgruppen $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\langle(1,1)\rangle$ er isomorf med gruppen $\mathbb{Z}$.

**4**

La $G$ være gruppen av inverterbare $2 \times 2$-matriser over $\mathbb{Z}_3$ under matrisemultiplikasjon. La $H = \{\left(\begin{smallmatrix} a & o \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c \ \ i \ \ \mathbb{Z}_3, ac \neq 0\}$.

Vis at $H$ er en undergruppe av $G$, men ikke en normal undergruppe.

**5**

Det skal lages kvadratiske matter av formen

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

der alle de 9 små kvadratene er like store, og vi skal fargelegge de 9 kvadratene i matten på den ene siden med sort eller hvitt. På hvor mange essensielt forskjellige måter kan dette gjøres, når to fargelegginger betraktes som like når den ene fremkommer fra den andre ved en rotasjon om midtpunktet av det store kvadratet.

**6**

**a)** Finn alle nulldivisorer i $\mathbb{Z}_{12}$.

**b)** Vis at den kommutative ringen $\mathbb{R}[x]$ ikke er en kropp ($\mathbb{R}$ betegner de reelle tall).

**7** La $p(x) = x^2 + 2x + 2$ være i $\mathbb{Z}_3[x]$

**a)** Forklar hvorfor den kommutative faktorringen $F = \mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x) \rangle$ er en kropp, og finn antall elementer i F.

**b)** Vis at $\alpha = x + \langle p(x) \rangle$ er en generator for den sykliske gruppen $F \backslash \{0\}$ (under multiplikasjon).