Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Idun Reiten (992 44 539)

EKSAMEN I ALGEBRA OG TALLTEORI (TMA4150)
Bokmål

17. august 2006
Tid: 15.00 – 19.00

Hjelpemidler:
Godkjent kalkulator HP30S

Oppgavesettet består av 7 oppgaver. Alle svar skal begrunnes. Lykke til!

Oppgave 1

a) Bestem hvor mange ikke-isomorfe abelske grupper det finnes av orden 24, og skriv disse ned.

b) Hvilken av gruppene i a) er faktorgruppen $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 / \langle (2,2,0) \rangle$ isomorf med?

Oppgave 2 La $\sigma = (213)(2146)(56)$ og $\tau = (243)(164)$ være elementer i S_6, gruppen av permutasjoner av 6 elementer.

a) Er τ en odde eller en like permutasjon? Hva er indeksen til undergruppen $\langle \sigma\tau \rangle$ av S_6?

b) Nøyaktig halvparten av permutasjonene i S_6 er like. (Skal ikke vises.) Vis at mengden A_6 bestående av alle de like permutasjonene er en undergruppe av S_6, og at denne er normal.

Oppgave 3 Finn fire undergrupper av orden 3 i S_4, gruppen av permutasjoner av 4 elementer, og vis at disse er konjugerte. (Altså: Vis at for hvert par H_1, H_2 av slike undergrupper, finnes et element $g \in G$ slik at $H_1 = gH_2g^{-1}$.)

Oppgave 4 La G være en gruppe, og H en undergruppe av G. Vis at G er en H-gruppe, når virkningen er gitt ved konjugering:

$$h * g = hgh^{-1} \in G$$

for alle $h \in H$ og alle $g \in G$.

Oppgave 5 La G være en gruppe, og la H være en undergruppe av G, med indeks $(G : H) = n$. Vis at for alle $a \in G$ har vi at $a^n \in H$ hvis H er normal i G. Gi et eksempel på at det ikke holder når H ikke er normal.

Oppgave 6 Gi definisjonen på Eulers ϕ-funksjon og bruk denne funksjonen til å finne resten vi får når vi deler 2^{3456} på 21.

Oppgave 7 La $p(x) = x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

a) Forklar hvorfor $F = \mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x) \rangle$ er en kropp.

b) Finn en generator for den sykliske gruppa $F \backslash \{0\}$.