Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Instituttt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Dagfinn F. Vatne 901 38 621

EKSAMEN I ALGEBRA OG TALLTEORI (TMA4150)
Bokmål

Lørdag 11. august, 2007
Tid: 09.00 – 13.00 Sensur: 31. august

Tillatte hjelpemidler:
Kalkulator HP30S

Prøven består av 7 oppgaver. Alle svar skal begrunnes. Lykke til!

Oppgave 1

a) Bestem hvor mange abelske grupper av orden 8 det finnes, og skriv disse ned.

b) Bestem hvilken av gruppene i a) faktorgruppen $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8 / \langle (1,2) \rangle$ er isomorf med.

Oppgave 2 La $\sigma = (3,4)(1,4)(2,5) \in S_5$, gruppen av permutasjoner av fem elementer. Hva er indeksen $(S_5 : \langle \sigma \rangle)$ til undergruppen generert av σ? Er $\langle \sigma \rangle$ en normal undergruppe?

Oppgave 3

i) Hvis G er en gruppe, og a og b er to element slik at ordenen til ab er n, vis at ba også har orden n.

ii) Vis at hvis G er en gruppe med et partall antall element, så er antall element med orden lik 2 et oddetall.

Oppgave 4 Skriv ned definisjonen på Eulers ϕ-funksjon, og finn det siste sifferet i tallet $7^{1000000}$.

Oppgave 5 Et kvadratisk spillebrett med 9 like store kvadratiske ruter skal fargelegges med én farge i hver rute. Vi har 3 farger å velge mellom. På hvor mange måter kan dette gjøres, når vi regner to måter som like hvis vi kan få den ene fra den andre ved å rotere brettet? (Det skal farges kun på den ene siden.)

Oppgave 6 Finn alle enheter i polynomringen $\mathbb{Z}_5[x]$. Er $\mathbb{Z}_5[x]$ et integritetsområde? Er $\mathbb{Z}_5[x]$ en kropp?

Oppgave 7

a) La $p(x) = x^5 + x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. Finn to ulike maksimale idealer I_1 og I_2 slik at $p(x) \in I_1$ og $p(x) \in I_2$.

b) Forklar hvorfor $F = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x + 1 \rangle$ er en kropp, og finn en generator for den sykliske gruppen $F \backslash \{0\}$.