Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Dagfinn F. Vatne (90 13 86 21)

EKSAMEN I ALGEBRA OG TALLTEORI (TMA4150)
Bokmål

Lørdag 20. mai 2006
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidler:
Godkjent kalkulator HP30S

Oppgavesettet består av 6 oppgaver. Alle svar skal begrunnes. Lykke til!

Oppgave 1

a) Finn alle abelske grupper av orden 36, opp til isomorfi.

b) La G være gruppen av enheter i ringen $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$. Hvilken av gruppene i a) er G isomorf med?

Oppgave 2

a) La R være en kommutativ ring med multiplikativ identitet 1, og la U være mengden av enheter i R. Vis at U er en gruppe med hensyn på multiplikasjon.

b) La $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n > 1$, og forklar kort hvordan Eulers setning følger av oppgave **a)**. (Eulers setning sier at hvis a er et heltall som er relativt primisk til n, så er $a^{\phi(n)} \equiv 1(\text{mod } n)$, der ϕ er Eulers ϕ-funksjon.)

Oppgave 3 La G være gruppen av inverterbare 2×2-matriser over de rasjonale tall $\mathbb{Q}$. La $r < s$ være i $\mathbb{Q}$, $r, s \neq 0$. La

$$H_{r,s} = \{A \in G \mid \det A = r \text{ eller } \det A = s\}$$

a) Vis at $H_{r,s}$ er en undergruppe av G hvis og bare hvis $(r, s) = (-1, 1)$.

b) Vis at $H = H_{-1,1}$ er en normal undergruppe av G og at faktorgruppen G/H er isomorf med gruppen av positive rasjonale tall under multiplikasjon.

Oppgave 4 Vi skal farge hjørnene i en regulær femkant. To farginger regnes som like dersom vi kan få den ene fra den andre ved å rotere eller vende femkanten i rommet.

a) Beskriv elementene i symmetrigruppen til femkanten, betraktet som en undergruppe av gruppen av permutasjoner på de fem hjørnene.

b) Hvor mange forskjellige måter kan vi fargelegge hjørnene i femkanten på, når vi har 3 ulike farger tilgjengelig, og kan bruke disse så mange ganger vi vil?

Oppgave 5

a) Hvis R er en kommutativ ring med multiplikativ identitet $1 \neq 0$, så er også polynomringen $R[x]$ det. (Skal ikke vises.) Vis at dersom R er et integritetsområde, så er også $R[x]$ det.

b) La $p(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 1$ være et polynom i $\mathbb{Z}_3[x]$. Skriv $p(x)$ som et produkt av polynomer som er irredusible i $\mathbb{Z}_3[x]$.

Oppgave 6 La $f(x) = x^4+x+1$ være et polynom i $\mathbb{Z}_2[x]$. Forklar hvorfor $F = \mathbb{Z}_2[x]/\langle f(x)\rangle$ er en kropp, og finn en generator for den sykliske gruppen $F\backslash\{0\}$.