NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4150 Algebra**

Faglig kontakt under eksamen: Torkil Utvik Stai

Tlf: 47638459

Eksamensdato: 29. mai 2018

Eksamenstid (fra–til): 15:00–19:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

Eksamenssettet består av de ti oppgavene 1, 2, 3a, 3b, 4, 5a, 5b, 6, 7a og 7b. Hver av disse teller like mye i vurderingen. Engelsk oversettelse er vedlagt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Beskriv alle abelske grupper av orden 24 opp til isomorfi. Avgjør hvilken av disse gruppene som er isomorf med gruppen

$$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_8 \Big/ \langle (3,4) \rangle.$$

Oppgave 2 S_8 er gruppen av permutasjoner på mengden $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Se på elementet

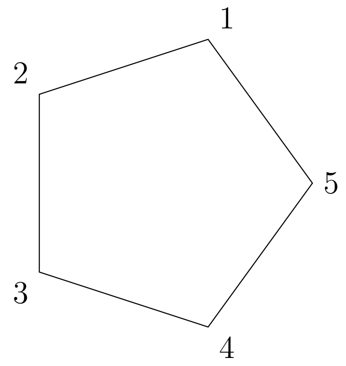
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 8 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in S_8.$$

(i) Skriv σ som et produkt av disjunkte sykler.

(ii) Hva er ordenen til σ?

(iii) Tilhører σ den alternerende gruppen A_8? Svaret skal begrunnes.

Oppgave 3 La D_5 være gruppen av symmetrier av den regulære femkanten.



a) Beskriv D_5 som en undergruppe av S_5, det vil si uttrykk elementene i D_5 som permutasjoner på mengden $\{1,2,3,4,5\}$. Er D_5 normal i S_5? Svaret skal begrunnes.

b) På hvor mange forskjellige måter kan vi fargelegge de fem hjørnene i den regulære femkanten hvis vi har fire farger tilgjengelige? Vi oppfatter to fargelegginger som like hvis den ene kan føres over til den andre ved en av symmetriene i D_5 til den regulære femkanten.

Oppgave 4

a) Hva menes med en simpel gruppe?

(i) Vis at ingen gruppe av orden 28 er simpel.

(ii) La p være et primtall slik at også $2^p - 1$ er et primtall. La G være en gruppe av orden $2^{p-1}(2^p - 1)$. Vis at G ikke er simpel.
Hint: Finn antallet Sylow $(2^p - 1)$-undergrupper av G.

b) Hva menes med en komposisjonsrekke for en gruppe? Finn tre komposisjonsrekker for gruppen $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$.

Oppgave 5 La G være en gruppe med normale undergrupper H og K. Anta at $H < K$ og at gruppen G/H er abelsk. Vis at gruppen G/K er abelsk.

Oppgave 6 La $p(x) = x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ og la $\langle p(x) \rangle \subset \mathbb{Z}_3[x]$ være idealet generert av $p(x)$.

(i) Forklar hvorfor $F = \mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x) \rangle$ er en kropp. Hvor mange elementer har F?

(ii) Er idealet $\langle p(x) \rangle$ et primideal? Finnes det et primideal i ringen $\mathbb{Z}_3[x]$ som ikke er et maksimalt ideal? Svarene skal begrunnes.

Oppgave 7 S_n er gruppen av permutasjoner på mengden $\{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Forklar hvorfor S_n er generert av mengden av *alle* transposisjoner $(i, j) \in S_n$.

(i) Vis at gruppen S_6 er generert av de fem transposisjonene

$$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6) \in S_6.$$

(ii) Vis at gruppen S_6 er generert av de to elementene

$$(1, 2), (1, 2, 3, 4, 5, 6) \in S_6.$$

b) Gruppen S_n er alltid generert av transposisjonen $(1, 2)$ og en vilkårlig sykel $(1, 2, i_3, \ldots, i_n)$ med $\{i_3, \ldots, i_n\} = \{3, \ldots, n\}$ (dette skal du ikke vise).

La p være et primtall og la H være en undergruppe av S_p. Vis at hvis H inneholder en transposisjon og p er en divisor i ordenen til H, så er $H = S_p$.

Problem 1 Describe all abelian groups of order 24 up to isomorphism. Determine which of these groups is isomorphic to the group

$$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_8 \big/ \langle (3,4) \rangle.$$

Problem 2 S_8 is the group of permutations on the set $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Consider the element

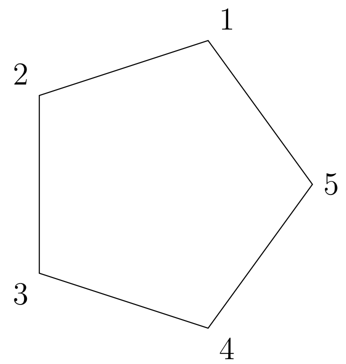
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 8 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in S_8.$$

(i) Write σ as a product of disjoint cycles.

(ii) What is the order of σ?

(iii) Does σ belong to the alternating group A_8? Give reasons for your answer.

Problem 3 Let D_5 be the group of symmetries of the regular 5-gon.



a) Describe D_5 as a subgroup of S_5, that is, express the elements of D_5 as permutations on the set $\{1,2,3,4,5\}$. Is D_5 normal in S_5? Give reasons for your answer.

b) In how many ways can we color the five vertices of the regular 5-gon if we have four colors available? We consider two colorings to be the same if one can be turned into the other by one of the symmetries in D_5 of the regular 5-gon.

Problem 4

a) What is meant by a simple group?

(i) Show that no group of order 28 is simple.

(ii) Let p be a prime number such that also $2^p - 1$ is a prime number. Let G be a group of order $2^{p-1}(2^p - 1)$. Show that G is not simple.
Hint: Find the number of Sylow $(2^p - 1)$-subgroups of G.

b) What is meant by a composition series of a group? Find three composition series of the group $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$.

Problem 5 Let G be a group with normal subgroups H and K. Assume that $H < K$ and that the group G/H is abelian. Show that the group G/K is abelian.

Problem 6 Let $p(x) = x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ and let $\langle p(x) \rangle \subset \mathbb{Z}_3[x]$ be the ideal generated by $p(x)$.

(i) Explain why $F = \mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x) \rangle$ is a field. How many elements does F have?

(ii) Is the ideal $\langle p(x) \rangle$ a prime ideal? Is there a prime ideal in the ring $\mathbb{Z}_3[x]$ which is not a maximal ideal? Give reasons for your answers.

Problem 7 S_n is the group of permutations on the set $\{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Explain why S_n is generated by the set of *all* transpositions $(i, j) \in S_n$.

(i) Show that the group S_6 is generated by the five transpositions

$$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6) \in S_6.$$

(ii) Show that the group S_6 is generated by the two elements

$$(1, 2), (1, 2, 3, 4, 5, 6) \in S_6.$$

b) The group S_n is always generated by the transposition $(1, 2)$ and an arbitrary cycle $(1, 2, i_3, \ldots, i_n)$ with $\{i_3, \ldots, i_n\} = \{3, \ldots, n\}$ (you are not asked to show this).

Let p be a prime number and let H be a subgroup of S_p. Show that if H contains a transposition and p is a divisor of the order of H, then $H = S_p$.