

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i TMA4150 Algebra

Faglig kontakt under eksamen:

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

Eksamenssettet består av de ti oppgavene 1, 2, 3a, 3b, 4, 5, 6, 7a, 7b og 7c. Hver av disse teller like mye i vurderingen. Engelsk oversettelse er vedlagt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ 2-sidig ☒

sort/hvit ☒ farger ☐

skal ha flervalgskjema ☐

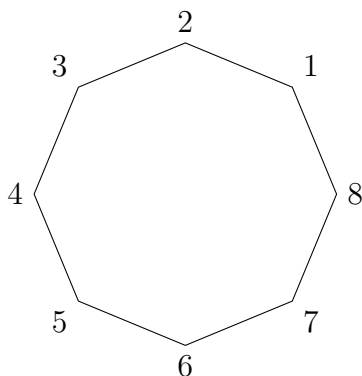
Dato

Sign

Oppgave 1

- (i) Beskriv alle abelske grupper av orden 12 opp til isomorfi.
- (ii) La G være den multiplikative gruppen av enheter i ringen $\mathbb{Z}_{21}$. Skriv ned elementene i G og avgjør hvilken av gruppene fra (i) som er isomorf med G .

Oppgave 2 På hvor mange forskjellige måter kan vi fargelegge hjørnene til en regulær åttekant hvis vi har tre farger tilgjengelige? Vi oppfatter to fargelegginger som like hvis den ene kan føres over til den andre ved en av symmetriene til den regulære åttekanten.



Oppgave 3 La G være en gruppe. Kommutatorundergruppen $C(G)$ til G er den minste undergruppen av G som inneholder alle kommutatorene i G , det vil si alle elementene på formen $aba^{-1}b^{-1}$ med $a, b \in G$.

- a) La N være en undergruppe av G .
 - (i) Vis at hvis $C(G) \subset N$, så er N normal i G og gruppen G/N er abelsk.
 - (ii) Vis at hvis N er normal i G og gruppen G/N er abelsk, så er $C(G) \subset N$.
- b) Vis at hvis $\phi: G \rightarrow G'$ er en gruppehomomorfi og G' er abelsk, så er $C(G)$ en normal undergruppe av $\ker \phi$.

Oppgave 4 Hva menes med en oppløslbar gruppe?

- (i) La p være et primtall og la $n \geq 1$ være et heltall. La G være en gruppe av orden p^n . Vis at G er oppløslbar.

Hint: Bruk det første Sylow-teoremet.

- (ii) Vis at den dihedrale gruppen D_n er oppløslbar for hver $n \geq 3$.

Hint: D_n har en syklisk undergruppe av orden n .

Oppgave 5 Senteret til en gruppe G er undergruppen

$$Z(G) = \{z \in G \mid gz = zg \text{ for hver } g \in G\}.$$

S_n er gruppen av permutasjoner på mengden $\{1, 2, \dots, n\}$. Vis at hvis $n \geq 3$, så inneholder senteret til S_n kun identitets-elementet, altså $Z(S_n) = \{e\}$.

Hint: Hvilke elementer i S_n kommuterer med enhver transposisjon?

Oppgave 6 La $p(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ og la $\langle p(x) \rangle \subset \mathbb{Z}_3[x]$ være idealet generert av $p(x)$.

- (i) Forklar hvorfor $F = \mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x) \rangle$ er en kropp. Hvor mange elementer har F ?
- (ii) La $(ax + b) + \langle p(x) \rangle \in F$ være et ikke-null element. Finn inversen til dette elementet i F .
- (iii) La F^* være gruppen av enheter i F under multiplikasjon. Er $x + \langle p(x) \rangle \in F^*$ en generator for F^* ? Svaret skal begrunnes.

Oppgave 7 Mengden G av alle inverterbare 2×2 -matriser over kroppen $\mathbb{Z}_5$ er en gruppe under matrisemultiplikasjon modulo 5 (dette skal du ikke vise).

- a) Vis at ordenen til G er 480.

- b) La $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

- (i) Vis at g genererer en Sylow 5-undergruppe av G .

- (ii) Vis at $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ er konjugert med g for hver $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Hint: Konjugér med en diagonalmatrise.

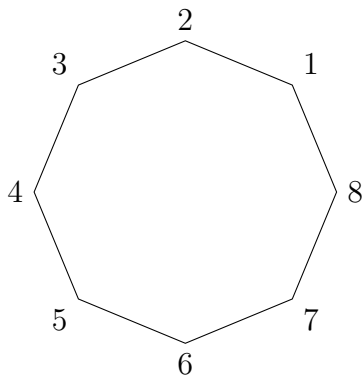
- c) Vis at ethvert element i G av orden 5 er konjugert med g . Hvor mange elementer av orden 5 finnes det i G ?

Hint: Regn ut isotropiundergruppen til g under konjugasjon.

Problem 1

- (i) Describe all abelian groups of order 12 up to isomorphism.
- (ii) Let G be the multiplicative group of units in the ring $\mathbb{Z}_{21}$. Write down the elements of G and determine which of the groups from (i) is isomorphic to G .

Problem 2 In how many ways can we color the vertices of a regular 8-gon if we have three colors available? We consider two colorings to be the same if one can be turned into the other by one of the symmetries of the regular 8-gon.



Problem 3 Let G be a group. The commutator subgroup $C(G)$ of G is the smallest subgroup of G which contains all the commutators in G , that is all the elements of the form $aba^{-1}b^{-1}$ with $a, b \in G$.

- a) Let N be a subgroup of G .
 - (i) Show that if $C(G) \subset N$, then N is normal in G and the group G/N is abelian.
 - (ii) Show that if N is normal in G and the group G/N is abelian, then $C(G) \subset N$.
- b) Show that if $\phi: G \rightarrow G'$ is a group homomorphism and G' is abelian, then $C(G)$ is a normal subgroup of $\ker \phi$.

Problem 4 What is meant by a solvable group?

- (i) Let p be a prime number and let $n \geq 1$ be an integer. Let G be a group of order p^n . Show that G is solvable.

Hint: Use the first Sylow theorem.

- (ii) Show that the dihedral group D_n is solvable for each $n \geq 3$.

Hint: D_n has a cyclic subgroup of order n .

Problem 5 The center of a group G is the subgroup

$$Z(G) = \{z \in G \mid gz = zg \text{ for each } g \in G\}.$$

S_n is the group of permutations on the set $\{1, 2, \dots, n\}$. Show that if $n \geq 3$, then the center of S_n contains only the identity element, that is $Z(S_n) = \{e\}$.

Hint: Which elements of S_n commute with any transposition?

Problem 6 Let $p(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ and let $\langle p(x) \rangle \subset \mathbb{Z}_3[x]$ be the ideal generated by $p(x)$.

- (i) Explain why $F = \mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x) \rangle$ is a field. How many elements does F have?
- (ii) Let $(ax + b) + \langle p(x) \rangle \in F$ be a non-zero element. Find the inverse of this element in F .
- (iii) Let F^* be the group of units in F under multiplication. Is $x + \langle p(x) \rangle \in F^*$ a generator for F^* ? Give reasons for your answer.

Problem 7 The set G of all invertible 2×2 matrices over the field $\mathbb{Z}_5$ is a group under matrix multiplication modulo 5 (do not show this).

a) Show that the order of G is 480.

b) Let $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

(i) Show that g generates a Sylow 5-subgroup of G .

(ii) Show that $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ is conjugate to g for each $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Hint: Perform conjugation by a diagonal matrix.

c) Show that each element in G of order 5 is conjugate to g . How many elements of order 5 are there in G ?

Hint: Calculate the isotropy subgroup of g under conjugation.