

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i TMA4150 Algebra

Faglig kontakt under eksamen: Johanne Haugland

Tlf: 95757487

Eksamensdato: 27. mai 2019

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

Eksamenssettet består av de ti oppgavene 1a, 1b, 2a, 2b, 3, 4, 5a, 5b, 6 og 7. Hver av disse teller like mye i vurderingen. Alle svar skal begrunnes.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ 2-sidig ☒

sort/hvit ☒ farger ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Dato

Sign

Oppgave 1

- a) Beskriv alle abelske grupper av orden 20 opp til isomorfi.
- b) Gruppen S_9 består av alle permutasjoner på mengden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. La H være undergruppen av S_9 generert av elementet

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 5 & 8 & 6 & 2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Forklar hvorfor H er en abelsk gruppe av orden 20. Avgjør hvilken av gruppene fra oppgave a) som er isomorf med H .

Oppgave 2

- a) Finn alle irreducible polynomer av grad fem i $\mathbb{Z}_2[x]$.
- b) Konstruer en kropp med 32 elementer.

Oppgave 3 La $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, altså mengden av alle reelle tall bortsett fra -1 . For to elementer a og b i G , definer $a * b = a + b + ab$.

- (i) Vis at $(G, *)$ er en gruppe.
- (ii) Vi kan definere operasjonen $*$ på mengden $\mathbb{R}$ tilsvarende som ovenfor. Er $(\mathbb{R}, *)$ en gruppe?

Oppgave 4 La G være en abelsk gruppe og definer

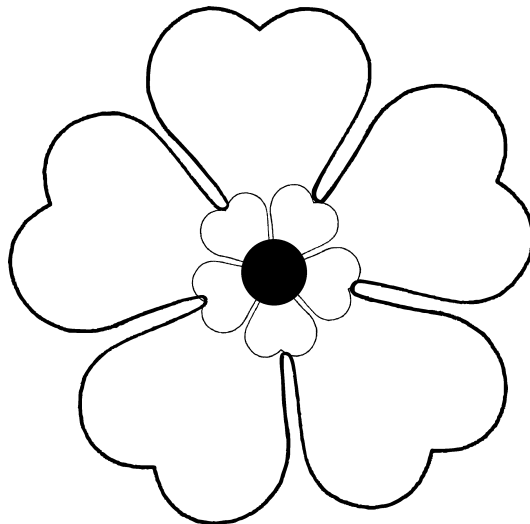
$$\Delta G = \{(g, g) \in G \times G \mid g \in G\}.$$

Vis at ΔG er en normal undergruppe av $G \times G$. Vis at faktorgruppen $(G \times G)/\Delta G$ er isomorf med G .

Oppgave 5 La G være en endelig gruppe og p et primtall.

- a) Vis at G er en p -gruppe hvis og bare hvis ordenen til G er en potens av p .
- b) (i) Hva vil det si at en undergruppe H av G er en sylow- p -undergruppe?
(ii) Bruk tredje sylowteorem for å finne ut hvor mange sylow-3-undergrupper en gruppe av orden 42 kan ha.

Oppgave 6 Arnt Robert lager trondheimsroser for lokalhistorielaget. Skissen nedenfor viser en forenklet versjon av rosa.



Den består av ti blader i glass, fem store og fem små. Hvert blad kan være enten rødt, blått eller grønt. Arnt Robert ønsker at hvert medlem av lokalhistorielaget skal få ei unik rose, og han skiller ikke mellom roser som er rotasjoner eller refleksjoner av hverandre. Hva er det største antallet medlemmer lokalhistorielaget kan ha for at dette er mulig?

Oppgave 7 La G være en abelsk simpel gruppe med $|G| \geq 2$. Vis at G er isomorf med $\mathbb{Z}_p$ for et primtall p .