TMA4150 Algebra

Øving 10

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Fra boka:
Seksjon 20: 2, 8, 9, 27, 28
Seksjon 22: 1, 5, 17, 24, 25

Eksamensoppgaver:
Eksamen Høst 2011, oppg 2
Eksamen Høst 2006, oppg 1

Avansert oppgave for den interesserte: Homologisk algebra

$\boxed{*}$ I denne oppgaven skal vi få et lite innblikk i den delen av moderne algebra som kalles *homologisk algebra*. Dette utviklet seg på 1940-tallet til å bli et eget fagfelt, sterkt påvirket av det som kalles algebraisk topologi. I dag benytter man seg av homologisk algebra også i mange andre deler av matematikken, som matematisk fysikk, algebraisk tallteori, algebraisk geometri osv.

a) Anta at vi har tre abelske grupper H, G, L og to gruppehomomorfier φ, ψ i en sekvens slik:

$$H \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} L$$

For en gruppehomomorfi har vi tidligere i kurset definert *kjernen* og *bildet*, og dette er to nye grupper. Per definisjon har vi

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\psi) &= \{g \in G \mid \psi(g) = 0\} \\ \mathrm{Im}(\varphi) &= \{\varphi(h) \mid h \in H\}. \end{aligned}$$

Begge disse er undergrupper av G, men har generelt ikke noe med hverandre å gjøre. Vis at følgende er ekvivalent:

1. $\mathrm{Im}(\varphi) \leq \mathrm{Ker}(\psi)$, dvs. $\mathrm{Im}(\varphi)$ er en undergruppe av $\mathrm{Ker}(\psi)$.
2. Sammensettingen av φ og ψ er triviell, dvs. $\psi \circ \varphi = 0$.

b) En sekvens som den i (a) kalles *eksakt i* G hvis $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\varphi)$. Se nå på en sekvens

$$(0) \xrightarrow{0} H \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} L \xrightarrow{0} (0)$$

hvor gruppen (0) betegner den trivielle abelske gruppen (med bare ett element), og de to gruppehomomorfiene på endene er nullavbildningen. En slik sekvens kalles *kort-eksakt* hvis den er eksakt i både H, G og L. Vis at følgende er ekvivalent:

1. Sekvensen er kort-eksakt.
2. φ er injektiv, ψ er surjektiv, og $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\varphi)$.

c) La G være en abelsk gruppe og H en undergruppe. For abelske grupper er alle undergrupper automatisk normale, så vi kan danne faktorgruppen G/H. La $i\colon H \to G$ være inklusjons-homomorfien og $\pi\colon G \to G/H$ homomorfien gitt ved $\pi(g) = g + H$, dvs. π sender et element i G til sin restklasse (som jo er et element i G/H). Vis at sekvensen

$$(0) \xrightarrow{0} H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/H \xrightarrow{0} (0)$$

er kort-eksakt.

d) Et *kompleks* $\mathbb{K}$ av abelske grupper er en sekvens (kan være uendelig lang i begge retninger)

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+3}} G_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots$$

hvor følgende holder:

(i) Hver G_n er en abelsk gruppe.

(ii) Hver f_n er en gruppehomomorfi.

(iii) Sammensettingen av to etterfølgende gruppehomomorfier er triviell, dvs. $f_n \circ f_{n+1} = 0$ for alle $n \in \mathbb{Z}$.

Fra (a) vet vi at egenskap (iii) er ekvivalent med at $\mathrm{Im}(f_{n+1}) \leq \mathrm{Ker}(f_n)$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. For et slikt kompleks kan vi derfor danne faktorgruppen $\mathrm{Ker}(f_n)/\mathrm{Im}(f_{n+1})$ for alle n. Dette kalles den $n$te *homologigruppen* til komplekset $\mathbb{K}$, og betegnes $\mathbf{H}_n(\mathbb{K})$. Altså:

$$\mathbf{H}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}(f_n)/\mathrm{Im}(f_{n+1}).$$

Komplekset $\mathbb{K}$ kalles *eksakt* hvis det er eksakt i G_n for alle $n \in \mathbb{Z}$. Vis at følgende er ekvivalent:

1. Komplekset $\mathbb{K}$ er eksakt.
2. $\mathbf{H}_n(\mathbb{K}) = (0)$ for alle $n \in \mathbb{Z}$, dvs. for alle $n \in \mathbb{Z}$ er homologigruppen $\mathbf{H}_n(\mathbb{K})$ den trivielle gruppen (med kun ett element).

e) Se på følgende tre sekvenser:

$$\cdots \xrightarrow{\cdot 5} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 5} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 5} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\cdot 2} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{\cdot 4} \cdots$$

Her betyr avbildningene "$\cdot a$" at man multipliserer med a (dette blir gruppehomomorfier). Vis at alle disse tre sekvensene er komplekser. Er noen av dem eksakte?