



Oppgavene merket \* er litt mer utfordrende.

**Fra boka:**

Seksjon 27: 5, 6, 9, 31, 34, 35

**Eksamensoppgaver:**

Vår 2011: oppgave 3

Høst 2010: oppgave 3

Vår 2009: oppgave 4

Vår 2008: oppgave 5

**Andre oppgaver:**

- 1 Vis at hvis  $I \subseteq \mathbb{Z}$  er et ideal så finnes det et element  $n \in \mathbb{Z}$  med  $n \geq 0$  slik at

$$I = n\mathbb{Z} = \{nq \mid q \in \mathbb{Z}\}$$

*Hint:* Divisjonsalgoritmen for  $\mathbb{Z}$ .

- 2 Vis at for et ideal  $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$  gjelder:

$$n\mathbb{Z} \text{ maksimalt ideal} \Leftrightarrow n \text{ primtall.}$$

- 3 La  $F$  være en kropp. Vis at hvis  $I \subseteq F[x]$  er et ideal så finnes et element  $f(x) \in F[x]$  slik at

$$I = \langle f(x) \rangle = \{f(x)g(x) \mid g(x) \in F[x]\}$$

*Hint:* Divisjonsalgoritmen for  $F[x]$ .

- 4 La  $F$  være en kropp og la  $f(x) \in F[x]$ . Vis at

$$\langle f(x) \rangle \text{ maksimalt ideal} \Leftrightarrow f(x) \text{ irreducibelt.}$$

*Hint for “ $\Leftarrow$ ”:* Anta at  $J$  er et ideal slik at  $\langle f(x) \rangle \subseteq J \subseteq F[x]$ . I følge oppgave (3) er da  $J = \langle p(x) \rangle$  for et element  $p(x) \in F[x]$ . Dersom  $\deg p = 0$  er  $p(x) = a$  for en konstant  $a$ . Vis at  $a \neq 0$ , og at vi da har  $J = F[x]$ . Dersom  $\deg p \geq 1$ , bruk divisjonsalgoritmen for  $F[x]$ :  $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$ ...