TMA4150 Algebra

Løsningsforslag — Øving 1

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Fra boka

10 **a)** Det er klart at summen av to multiplum av n også er et multiplum av n. Dette gjør at $+$ er en binæroperasjon $n\mathbb{Z}$.

Vi sjekker gruppeaksiomene som gitt i boka.

$\mathcal{G}1$: Addisjon i $\mathbb{Z}$ er en assosiativ operator, dermed er den også det i undermengder av $\mathbb{Z}$.

$\mathcal{G}2$: $0 = n \cdot 0 \in n\mathbb{Z}$.

$\mathcal{G}3$: Gitt $nx \in n\mathbb{Z}$, så er $-nx$ additiv invers.

b) Vi følger stegene gitt over eksempel 3.8 i boka for å vise at $\mathbb{Z} \cong n\mathbb{Z}$.

Steg 1: Her bruker vi funksjonen $\phi : \mathbb{Z} \to n\mathbb{Z}$ gitt ved $\phi(x) = nx$.

Steg 2: $\phi(x) = \phi(y) \Leftrightarrow nx = ny \Leftrightarrow x = y$ når $n \neq 0$, så funksjonen er én-til-én.

Steg 3: For $nx \in n\mathbb{Z}$ er $\phi(x) = nx$, så funksjonen er på.

Steg 4: $\phi(x + y) = n(x + y) = nx + ny = \phi(x) + \phi(y)$, så funksjonen respekterer binærstrukturen.

Altså er ϕ en isomorfi, og $\mathbb{Z} \cong n\mathbb{Z}$.

20 Ved bruk av kanselleringslovene og gruppeaksiomene kommer vi fram til at de tre tabellene er:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

(a) ?=e

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(b) ?=e

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

(c) ?=b

Gruppene beskrevet av første og siste tabell er isomorfe.

a) Alle grupper av orden 4 er abelske

b) U_4 er isomorf med gruppen beskrevet av den første/siste tabellen.

38 Vi sjekker gruppeaksiomene som gitt i boka.

$\mathcal{G}1$: Følger direkte fra de nye aksiomene.

$\mathcal{G}2$: Vi har en venstreidentitet e, vi sjekker at denne også er høyreidentitet. Vi observerer at for $x \in G$, med venstreinvers x', så holder

$$x'(xe) = (x'x)e = e = x'x.$$

Vi vet at x' har en venstreinvers, så vi ganger med denne på begge sider av ligningen:

$$xe = x,$$

og e er også en tosidig identitet.

$\mathcal{G}3$: Vi ser at

$$(xx')(xx') = x(x'x)x' = xx'.$$

Om vi ganger med venstreinversen av xx' på venstre side får vi:

$$xx' = e$$

og x' er en tosidig invers.