TMA4150 Algebra

Løsningsforslag — Øving 5

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Seksjon 13

$\boxed{8}$ $\phi(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$, mens $\phi(g)\phi(h) = g^{-1}h^{-1}$, så $\phi(gh) \neq \phi(g)\phi(h)$, generelt sett. Vi kan vise at ϕ er en isomorfi hvis og bare hvis G er abelsk.

$\boxed{45}$ Teorem 13.12 sier at $\phi[G] \leq G'$, så ordenen til $\phi[G]$ må være endelig (siden $|G'| < \infty$). Fra Lagranges teorem vet vi videre at ordenen til $\phi[G]$ deler ordenen til G'.

$\boxed{47}$ La e være identitetselementet i G.
Teorem 13.13 sier at $\ker\phi$ er en undergruppe av G. Siden $|G| = p$, og ordenen til en undergruppe alltid deler ordenen til gruppa, har vi to muligheter:

$|\ker\phi| = 1$, som medfører at $\ker\phi = \{e\}$. Da er i følge korollar 13.18 ϕ en én-til-én-avbildning.

$|\ker\phi| = p$, som medfører at $\ker\phi = G$. Da er ϕ den trivielle avbildningen.

Seksjon 14

$\boxed{24}$ $A_n \subseteq S_n$ er gruppen av like permutasjoner i S_n. Vi vet fra seksjon 9 at $|S_n| = n!$, og at

$$|A_n| = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \frac{n!}{2} & n \geq 2 \end{cases}$$

Dersom $n = 1$, er altså $A_n = S_n$, og dermed normal.
Dersom $n \geq 2$ ser vi at $(S_n : A_n) = 2$, slik at A_n har to venstre restklasser, kall disse A_n og σA_n, hvor $\sigma \notin A_n$. Vi ser at A_n og $A_n\sigma$ er de to høyre restklassene. Siden både høyre og venstre restklasser lager en partisjon av S_n følger det at $\sigma A_n = A_n\sigma$.

Alternativt kan man for eksempel studere avbildningen $\phi : S_n \to \mathbb{Z}_2$ som sender like permutasjoner på 0 og odde permutasjoner på 1. Er ϕ en homomorfi? Hva er kjernen?

Eksamensoppgaver

$\boxed{\text{Vår 2012, 4}}$ La $\phi : G \to G'$ være en homomorfi av endelige grupper, og la e, e' være identitetselementene i henholdsvis G og G'.

a) **$\ker \phi \leq G$:** Se teorem 13.12, punkt 4, med $K = \{e'\}$.
$\ker \phi \trianglelefteq G$: Se teorem 13.15.
$\phi(G) \leq G'$: Se teorem 13.12, punkt 3, med $H = G$.

b) Vi kan velge $\phi : S_3 \to \mathbb{Z}_2$ gitt ved

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} 0 & \sigma \text{ er like} \\ 1 & \sigma \text{ er odde} \end{cases}$$

.

Anta at $\psi : S_3 \to \mathbb{Z}_3$ ikke er triviell. Siden $\psi(S_3) \leq \mathbb{Z}_3$, må $\psi(S_3) = \mathbb{Z}_3$, for $\mathbb{Z}_3$ har ingen ikketrivielle, ekte undergrupper.
Fra det fundamentale teoremet for homomorfier (teorem 14.11), vet vi at $\psi(S_3) \cong S_3/\ker\psi$. Dermed er $(S_3 : \ker\psi) = |\mathbb{Z}_3| = 3$. Siden $|S_3| = 6$, er $|\ker\psi| = 2$.
Men $\ker\psi$ skal være en normal undergruppe, og S_3 har ingen normale undergrupper av orden 2. Fra denne selvmotsigelsen skjønner vi at det ikke kan finnes noen ikketrivielle homomorfier fra S_3 til $\mathbb{Z}_3$.

$\boxed{\text{Vår 2010, 1}}$ **a)**

$$(12)(23)(12) = (13) = (23)(12)(23)$$

b)

$$(12)^2 = (23)^2 = (1)$$
$$(12)(23) = (123)$$
$$(23)(12) = (132)$$

Sammenholder vi dette med informasjonen fra a ser vi at den minste undergruppen som inneholder (12) og (23) er undergruppen

$$H = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

c) Det er relativt greit å sjekke at denne avbildningen er en en-til-en homomorfi (spesielt om man gjør det med disjunkt sykel-notasjon).
$\phi[S_3] = H$ er ikke normal, for om vi velger $(14) \in G$ og $12 \in H$, så vil $(14)(12)(14) = (24) \notin H$.

$\boxed{\text{Høst 2010, 4}}$ **a)** Vi antar at G er en endelig gruppe med identitetselemen e, og antar at $H, N \leq G$.

(i)

$$hn = nh \Leftrightarrow hnh^{-1} = n \Leftrightarrow hnh^{-1}n^{-1} = e$$

(ii) Dersom N er normal i G, så er $hnh^{-1} \in N$ for alle $h \in H$ og $n \in N$. Siden N er en undergruppe har vi også at $n^{-1} \in N$, og N er lukket undergruppe-operasjon. Dermed er $hnh^{-1}n^{-1} \in N$.

(iii) Anta at H og N er normale undergrupper, og at $H \cap N = \{e\}$. Da vet vi at for alle $n \in N$ og $h \in H$ er $nhn^{-1}h^{-1}$ inneholdt i både H og N.
Dermed er $nhn^{-1}h^{-1} \in H \cap N = \{e\}$, så vi må ha $nhn^{-1}h^{-1} = e$. Fra første punkt ser vi da at $hn = nh$.

b) La $NH = \{nh | n \in N, h \in H\}$, og anta at N er en normal undergruppe av G. Vi sjekker at $NH \leq G$:

Lukket: La $nh, n'h' \in NH$. Da er

$$(nh)(n'h') = n(hn')h'$$

Vi bruker deloppgave a(ii) til å skrive $hn' = n''n'h$, hvor $n'' \in N$. Dermed er

$$(nh)(n'h') = n(n''n'h)h' = (nn''n')(hh')$$

altså er $(nh)(n'h')$ et element i NH.

Identitet: $e \in N \cap H$, så $e = ee \in NH$.

Invers: $(nh)^{-1} = h^{-1}n^{-1} = n^*h^{-1} \in NH$.

c) Vi starter med å vise at ϕ er en gruppehomomorfi.

$$\phi((n,h)(n',h')) = \phi(nn', hh') = nn'hh' = nhn'h' = \phi(n,h)\phi(n',h').$$

Anta at $\phi(n,h) = nh = e$. Da ser vi at $n = h^{-1}$, og dermed er $n \in H$ og dermed $n \in H \cap N$, som må bety at $n = h = e$. Følgelig er $\ker \phi = \{(e,e)\}$, og dermed er ϕ én-til-én

d) Denne oppgaven er egentlig ment å løses med Sylowteori, som blir undervist senere i kurset. At den kom på øvingen er en glipp. Under er en skisse til en løsning uten Sylowteori.

Anta at G er en gruppe med p^2 elementer. Dersom G er syklisk er den også abelsk, og vi er i mål. Anta derfor nå at G ikke er syklisk; da vil alle elementer $g \in G$ slik at $g \neq e$ generere en undergruppe av orden p (se Lagranges teorem). La $g \neq e$ være et slikt tilfeldig element, og la $N = \langle g \rangle$. Vi ønsker å vise at denne undergruppen er normal. Velg derfor et element $h \in G$; hvis $h \in N$ så er $hN = N = Nh$. Hvis $h \notin N$, la $H = \langle h \rangle$. Siden snittet av to undergrupper er en ny undergruppe, ser vi fra Lagrange at $N \cap H = \{e\}$. Anta nå at to av restklassene

$$N, hN, \ldots, h^{(p-1)}N$$

er like, si at $h^iN = h^jN$ for $0 \leq i < j \leq p-1$. Da ser vi at $h^{(j-i)}N = N$, som betyr at $h^{(j-i)} \in N$. Dette er en selvmotsigelse, så vi vet nå at alle de p venstre restklassene er ulike. Tilsvarende kan vi se at de p høyre restklassene

$$N, Nh, \ldots Nh^{(p-1)}$$

er ulike. Vi kan nå bruke dette til å vise at $hN = Nh$.

Siden både N og H er normale, og snittet deres er den trivielle undergruppen, finnes det en gruppehomomorfi $\phi : N \times H \to G$ (oppgave c) som er 1-1. Siden $|N \times H| = p^2 = |G|$, må ϕ i tillegg være på, og er dermed en isomorfi. N og H er sykliske og dermed også abelske, så det kartesiske produktet er abelsk. Følgelig er G en abelsk gruppe.

Ekstra

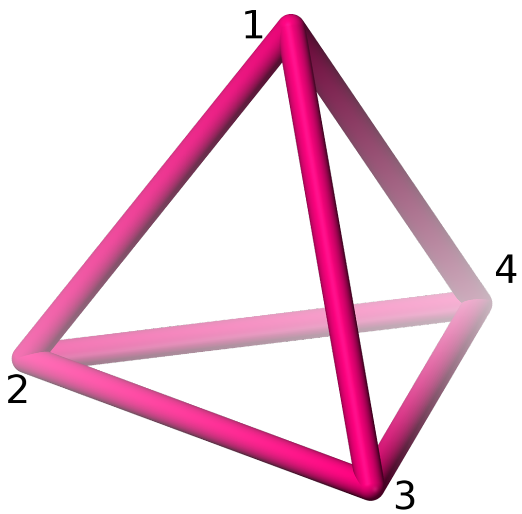
$\boxed{1}$ **a)** La $\phi(1) = a$; da er

$$\phi(n) = \phi(\overbrace{1 + \ldots + 1}^{n \text{ ganger}}) = \overbrace{\phi(1) + \ldots + \phi(1)}^{n \text{ ganger}} = n\phi(1) = an.$$

Følgelig er $\phi = \phi_a$.

b) ϕ_a er en isomorfi når $a = \pm 1$

$\boxed{2}$ Vi betrakter tetraederet med merking på hjørnene som i figuren. Vi gir for tydelig-



hetens skyld navn til sidene på figuren også:

Side	Hjørner
A	1,2,3
B	1,2,4
C	1,3,4
D	2,3,4

Anta at figurens utgangsposisjon er som på bildet. Etter en rotasjon er det fire muligheter for hvilken side som ligger underst, og gitt denne, tre muligheter for hvilken side som vender fremover. Dermed er tolv rotasjoner mulige

Disjunkt sykel-notasjon på hjørner	Side foran	Side under
(1)	A	D
(2,3,4)	B	D
(2,4,3)	C	D
(1,4,3)	D	B
(1,3,4)	B	A
(1,2,4)	D	C
(1,4,2)	C	A
(1,3,2)	A	C
(1,2,3)	A	B
(12)(34)	B	C
(13)(24)	C	B
(14)(23)	D	A

Denne gruppen er isomorf til A_4.