Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kapittel 36

12 Vi antar at G er en gruppe slik at $|G|$ deles av to forskjellige primtall p og q.

Anta at H er den eneste Sylow p-undergruppen av G. Siden q deler $|G|$, men ikke $|H|$, må $G \neq H$, så H er en ekte undergruppe. Siden p deler $|G|$, er H i følge første Sylowteorem heller ikke den trivielle undergruppen.

Siden H er den eneste undergruppen av sin orden (fordi H er den eneste Sylow p-undergruppen), så er i følge oppgave 14.34 (gitt på øving 6) H en normal undergruppe.

G inneholder dermed en ekte, ikke-triviell normal undergruppe, og er ikke simpel.

13 $|G| = 45 = 3^2 \cdot 5$

Siden denne oppgaven kommer rett etter oppgave 12, og ordenen til G oppfyller kravene i den oppgaven, mistenker vi at vi kan bruke resultatet derifra. Vi ser i tillegg at en Sylow 3-undergruppe av G vil ha orden 9, som er det oppgaven spør etter!

Fra tredje Sylowteorem vet vi at dersom n er antall Sylow 3-undergrupper, så vil $n \mid |G|$ og $n \equiv 1 \mod p$. Så for å finne antall Sylow 3-undergrupper sjekker vi divisorene av $|G|$:

Divisor av $\|G\|$	1	3	5	9	15	45
mod 3	1	0	2	0	0	0

Dermed kan det bare finnes én Sylow 3-undergruppe, det vil si kun en undergruppe av orden 9; så denne blir normal.

14 La $|G| < \infty$. Vi skal vise at $|G| = p^n \Leftrightarrow G$ er en p-gruppe.

"$\Rightarrow$" Anta at $|G| = p^n$, og la $g \in G$. Fra Lagranges teorem (10.10) vet vi at $|g| \mid |G|$. Dermed må $|g|$ være en potens av p. Siden dette gjelder for alle $g \in G$ er G en p-gruppe.

"$\Leftarrow$" Anta at G er en p-gruppe, og anta at $|G| \neq p^n$, det vil si at det eksisterer et primtall $q \neq p$ som deler $|G|$, for å komme fram til en selvmotsigelse. I følge teorem 36.3 må da G inneholde et element av orden q. q er åpenbart ikke en potensav p, så G kan ikke være en p-gruppe. Det følger at antagelsen må være gal, og $|G| = p^n$.

Eksamensoppgaver

Vår 2010, 3 **a)** Undergruppene av orden 2 vil inneholde identitetselementet og et annet element. Vi ser dermed raskt at de fem undergruppene av orden 2 er $\{\rho_0, \mu_i\}$ der $i = 1 \dots 5$

b) (i) 2-undergruppe av G er en undergruppe av orden 2^n. En Sylow 2-undergruppe er en 2-undergruppe som ikke er inneholdt i noen større 2-undergruppe. Den vil ha orden 2^n, der 2^n er den største toerpotensen som deler $|G|$

(ii) H og H' er konjungert dersom $H' = gHg^{-1}$ for en $g \in G$.

(iii) Alle gruppene i (a) er Sylow 2-undergrupper av D_10. Vi vet at alle Sylow p-undergrupper for en gitt p er konjungerte.

Høst 2010, 4 **a)** Se lf øving 5

b) Se lf øving 5

c) Se lf øving 5

d) Anta at $|G| = p^2$ for et primtall p. Hvis G er syklisk er G også abelsk.

Hvis G ikke er syklisk, velg en $h \in G$ slik at h ikke er identiteten i G. Da er $H = \langle h \rangle$ en undergruppe av G av orden p. I følge første Sylowteorem, andre del er da H en normal undergruppe av G. Velg nå $n \in G$ slik at $n \notin H$. Da er også $N = \langle n \rangle$ en normal undergruppe av G, etter samme logikk som over. Videre er $N \cap H = \{e\}$, for $N \neq H$, men $|N \cap H| \mid |N|, |H|$. Fra punkt (c) følger det at $N \times H \xrightarrow{\phi} G$ er en 1-1-homomorfi. Når vi betrakter størrelsen av mengdene ser vi at den også må være på, og dermed er en gruppeisomorfi. Det følger at $G \cong N \times H \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Dermed er G en abelsk gruppe.

Vår 2011, 4 Vi starter med å faktorisere: $|S_4| = 4! = 2^3 \cdot 3$. Som i oppgave 36.13 finner vi kandidatene til antall Sylow 3-undergrupper:

Divisor av $\lvert S_4 \rvert$	1	2	3	4	6	8	12	24
mod 3	1	2	0	1	0	2	0	0

Det er altså enten 1 eller 4 Sylow 3-undergrupper. Vi vet at en Sylow 3-undergruppe av S_4 må ha orden 3. Siden $\langle(1,2,3)\rangle$ og $\langle(1,2,4)\rangle$ er to ulike undergrupper av orden 3, må det finnes 4 ulike Sylow 3-undergrupper.

Høst 2011, 3 $G = S_5$, $\sigma = (1,2,3,4,5)$, $\tau = (1,3,4,5,2)$.

a) $\sigma\tau = (1,4)(3,5)$

$(\sigma\tau)^2 = (1)$, så $\sigma\tau$ har orden 2. $\sigma = (1,5)(1,4)(1,3)(1,2)$, så σ er en like permutasjon.

b) $|\sigma| = |\tau| = 5$.
$H_1 = \{(1,2,3,4,5),(1,3,5,2,4),(1,4,2,5,3),(1,5,4,3,2),(1)\}$
$H_2 = \{(1,3,4,5,2),(1,4,2,3,5),(1,5,3,2,4),(1,2,5,4,3),(1)\}$
$H_1 \neq H_2$, men $H_1 \cong H_2$ som grupper (siden de begge er sykliske grupper av en primtallsorden er dette greit å se).

c) Fremgangsmåten på denne oppgaven er som på Vår 2011, oppgave 4b. Svaret blir at det finnes 6 ulike Sylow 5-undergrupper.

d) Alle elementer i H kan skrives som et produkt av (potenser av) σ og τ. Siden σ og τ begge er like permutasjoner, vil også alle elementer i H være like. Dermed er $H \subseteq A_5$. $|A_5| = 60$, så når $|H| = 60$ må $H = A_5$