Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Fra boka:
Seksjon 18: 15, 18, 37, 46
Seksjon 19: 1, 2, 23

Andre oppgaver

1 La $n \in \mathbb{Z}$ være et heltall (ikke nødvendigvis positivt!) og definer

$$\mathbb{Z}[\sqrt{n}\,] = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Vis at dette er en ring og at $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{n}\,] \subseteq \mathbb{C}$.

2 La $M_n(\mathbb{C})$ være ringen av alle $n \times n$-matriser over $\mathbb{C}$. Finn alle nulldivisorene.
Hint: Determinant.

3

a) La R og S være to ringer. Vis at for et element $(a, b) \in R \times S$ gjelder følgende: (a, b) er en enhet i $R \times S$ hvis og bare hvis både a er en enhet i R og b er en enhet i S.

b) La R og S være ringer, og la $f : R \to S$ være en ringisomorfi. Vis at et element $a \in R$ er en enhet hvis og bare hvis $f(a)$ er en enhet i S.

c) La m, n være to positive heltall med $\gcd(m, n) = 1$. Definer $f : \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ved $f(a) = (a \mod m, a \mod n)$. Vis at f er en ringisomorfi.

d) Eulers phi-funksjon ϕ er definert som følger: For et positivt heltall n er

$$\phi(n) = |\{a | 1 \leq a \leq n, \gcd(a, n) = 1\}|.$$

Med andre ord, $\phi(n)$ er antall heltall mindre enn eller lik n som er relativt primisk til n. Vis at $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.
Hint: Se på antall enheter i $\mathbb{Z}_{mn}$, $\mathbb{Z}_m$ og $\mathbb{Z}_n$.

4 En ikke-triviell ringhomomorfi $f : R \to S$ er en ringhomomorfi slik at $f(a) \neq 0_S$ for minst én $a \in R$. 0_S betegner her den additive identiteten i S.

a) Vis at dersom $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ er en ikke-triviell ringhomomorfi, så er $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ og $f(-1) = -1$.

b) Vis at det ikke finnes noen ikke-triviell ringhomomorfi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.
Hint: Hva blir $f(i)$?