Fraktaler og kaos

Harald Hanche-Olsen
hanche@math.ntnu.no

Sammendrag. Tillegg til dynamiske systemer 1998. Etter notater av Nils A. Baas. Notatet gir et kort og meget konsist sammendrag av begrepene rundt fraktaler og kaos i diskrete dynamiske systemer.

Fraktaler

I dette avsnittet er (X,d) et komplett metrisk rom. Vi lar $\mathscr{H}(X)$ bestå av alle ikketomme kompakte delmengder av X. I praksis vil vi alltid la X være et Euklidsk rom $\mathbb{R}^n$ med standard metrikk $d(x,y) = |x-y|$. Husk at en delmengde av $\mathbb{R}^n$ er kompakt hvis og bare hvis den er lukket og begrenset.

Vi kan gjøre $\mathscr{H}(X)$ til et metrisk rom ved å definere *Hausdorff-metrikken* på $\mathscr{H}(X)$ ved

$$h(A,B) = \max\big(\max_{a\in A}\min_{b\in B} d(a,b), \max_{b\in B}\min_{a\in A} d(a,b)\big).$$

1 Teorem. *Dersom X er et komplett metrisk rom er $(\mathscr{H}(X),h)$ et komplett metrisk rom.*

2 Definisjon. La (X,d) være et metrisk rom. $f\colon X\to X$ kalles en *kontraksjon* dersom det finnes r, med $0\le r<1$ slik at

$$d(f(x),f(y)) \le r d(x,y) \qquad \forall x,y\in X.$$

Den minste r som oppfyller ulikheten kalles *kontraksjonsfaktoren.*

Anta det er gitt en endelig mengde av kontraksjoner $\psi_i\colon X\to X$ $(i=1,\dots,n)$. Definer så $\psi\colon \mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(X)$ ved

$$\psi(E) = \psi_1(E)\cup\psi_2(E)\cup\ldots\cup\psi_n(E)$$

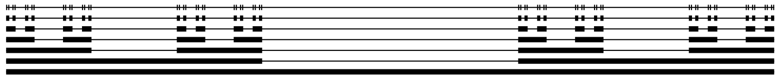
der $\psi_i(E) = \{\psi_i(x)\colon x\in E\}$.

Det viser seg at ψ ikke bare blir kontinuerlig på $\mathscr{H}(X)$, men at den blir en kontraksjon med kontraksjonsfaktor $r\le\max_i r_i$. En anvendelse av Banachs fikspunktsats leder umiddelbart til følgende:

3 Teorem. *Under betingelsene nevnt ovenfor finnes en entydig $A\in\mathscr{H}(X)$ slik at $\psi(A)=A$. Videre, for enhver $B\in\mathscr{H}(X)$ vil $\psi^k(B)\to A$ i Hausdorffmetrikken når $k\to\infty$.*

ψ kalles gjerne et itererert funksjonssystem, eller IFS. Mengden A kalles *attraktoren til* $\psi_1,\dots,\psi_n$. I blant kalles den også *fraktalen definert ved* $\psi_1,\dots,\psi_n$, men det er ikke alltid betegnelsen passer, siden attraktoren ikke nødvendigvis behøver være fraktal.

4 Eksempel. Med $X=\mathbb{R}$, $\psi_1(x) = x/3$ og $\psi_2(x) = x/3+2/3$ får vi den klassiske *Cantor-mengden*, som også kan defineres ved at man starter med intervallet $[0,1]$, fjerner den midterste tredjedelen $(1/3,2/3)$, fjerner den midterste tredjedelen av hvert av de to gjenværende intervallene, etc. (Etter første runde står man altså igjen med $[0,1/3]\cup[2/3,1]$, hvorfra man fjerner $(1/9,2/9)$ og $(7/9,8/9)$ og står igjen med $[0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[2/3,7/9]\cup[8/9,1]$. Fra hvert av disse fire intervallene fjerner man den midterste tredjedelen, og slik fortsetter man. Cantor-mengden består av alle de punktene i $[0,1]$ som aldri blir fjernet etter denne prosedyren. Den består av alle tall mellom 0 og 1 som kan skrives i tretallsystemet uten å bruke tallsifferet 2.) Denne konstruksjonen er helt ekvivalent med iterasjonen $\psi^k([0,1])$, $k=1,2,\dots$.



Figur 1: Iterasjoner av startmengden $[0,1]$ som konvergerer mot Cantormengden.

Figur 2: Iterasjoner av startmengden $\{1/2\}$ som konvergerer mot Cantormengden.

5 Definisjon. La $A \in \mathscr{H}(X)$. For gitt $\varepsilon > 0$, la $N(\varepsilon)$ være det minste antall kuler med radius ε som trengs for å dekke A. Grensen

$$D_F(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)},$$

dersom den eksisterer, kalles *fraktaldimensjonen* til A.

Definisjonen er motivert av idéen om at en D-dimensjonal mengde bør kunne dekkes av $N(\varepsilon)$ slike kuler, der $\mathrm{vol}(A) \approx N(\varepsilon)\varepsilon^D$.

Et annet mye brukt dimensjonsbegrep som kan gi ikke-heltallige dimensjoner er *Hausdorff-dimensjonen*, som har en noe mer komplisert definisjon. Men den fraktale dimensjonen og Hausdorff-dimensjonen stemmer overens på svært mange interessante eksempler.

Hausdorff-dimensjonen er indirekte definert via Hausdorff-målet μ_d, som vi ikke skal definere her. μ_d tilordner et tall $\mu_d(A) \in [0, \infty]$ til hver målbar mengde $A \in \mathbb{R}^n$, der $0 \le d < \infty$. $\mu_0(A)$ er antall punkter i A, $\mu_1(A)$ er lengden av A (om A er en kurve), $\mu_2(A)$ er overflaten av A, etc. Men $\mu_d(A)$ er også definert for ikke-heltallige d. For hver mengde A finnes en $D \ge 0$ slik at $\mu_d(A) = \infty$ om $d < D$ og $\mu_d(A) = 0$ om $d > D$. Denne verdien av D er Hausdorff-dimensjonen til A.

6 Eksempel. For den klassiske Cantormengden C og for $\varepsilon = 3^{-k}/2$ ser vi at vi kan dekke C med 2^k kuler av radius ε, og ikke noe mindre antall vil gjøre det samme. Det er nærliggende å konkludere at

$$D_F(C) = \lim_{k \to \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln(3^k \cdot 2)} = \lim_{k \to \infty} \frac{k \ln 2}{k \ln 3 + \ln 2} = \frac{\ln 2}{\ln 3},$$

og dette stemmer også. (Du må bruke at $N(\varepsilon_1) \ge N(\varepsilon_2)$ når $\varepsilon_1 \le \varepsilon_2$ for å komplettere beviset.)

7 Definisjon. En *similitude* i $\mathbb{R}^n$ er en kontraksjon som er satt sammen av krympninger, rotasjoner, translasjoner og refleksjoner.

En krympning er en dilatasjon $\psi(x) = \alpha x$ der $0 \le \alpha < 1$.

Vi sier at $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ er *ikke-overlappende* om $\psi_i(A) \cap \psi_j(A) = \emptyset$ når $i \ne j$, hvor A er attraktoren til $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$.

8 Teorem. *La $S_1, S_2, \dots, S_m$ være en ikke-overlappende mengde av similituder i $\mathbb{R}^n$. Da er fraktaldimensjonen $D = D_F(A)$ av den assosierte attraktoren gitt ved*

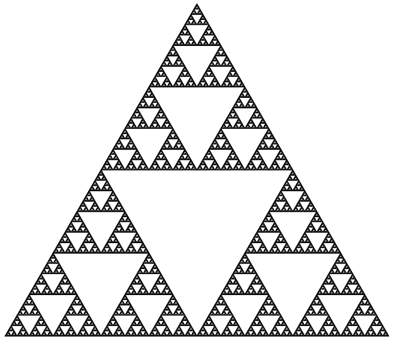
$$\sum_{i=1}^{m} s_i^D = 1$$

der s_i er kontraksjonsfaktoren til S_i.

Faktisk viser det seg at konklusjonen i teoremet holder under litt svakere betingelser («just touching»), som vi kaller *overlappingsbetingelser*.

9 Eksempel. Cantormengden C er attraktoren til to ikke-overlappende similituder, hver med kontraksjonsfaktor $1/3$. Så den fraktale dimensjonen blir gitt ved $2(1/3)^D = 1$, som gir $D = \ln 2 / \ln 3$.

10 Eksempel. Sierpinskitrekanten er attraktoren til tre similituder $S_i(x) = (x + H_i)/2$ i $\mathbb{R}^2$ der H_i er hjørnet nummer i i en likesidet trekant, for $i = 1, 2, 3$. Dette gir uten videre en fraktal dimensjon D gitt ved $3(1/2)^D = 1$, som gir $D = \ln 3 / \ln 2$. Det skal bemerkes at disse similitudene ikke er ikkeoverlappende i streng betydning, men de oppfyller overlappingsbetingelsene nevnt i merknaden til teoremet ovenfor.



Figur 3: Sierpinskitrekanten.

Kaos

Vi begrenser oss her til diskrete endimensjonale systemer. La J være et intervall.

11 Definisjon. En funksjon $f\colon J \to J$ kalles *transitiv* dersom det for alle ikketomme åpne delmengder U og V av J finnes en k slik at $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Med andre ord, det finnes minst ett punkt i U som under et passe antall iterasjoner av f beveger seg inn i V.

12 Definisjon. En funksjon $f\colon J \to J$ kalles *sensitivt* avhengig av initialdata dersom det finnes en $\delta > 0$ slik at for hver $x \in J$ og omegn N om x finnes $y \in N$ og $k > 0$ slik at

$$|f^k(x) - f^k(y)| > \delta.$$

Intuitivt: «Det finnes punkter vilkårlig nær x som under iterasjon blir separert minst en avstand δ.»

13 Definisjon. Et punkt $x_0 \in J$ kalles *periodisk* dersom det finnes $k \geq 1$ slik at $f^k(x_0) = x_0$.

14 Definisjon. En funksjon $f\colon J \to J$ kalles *kaotisk* dersom:

- f er sensitivt avhengig av initialdata,
- f er transitiv,
- de periodiske punktene til f er tett i J.

Et kaotisk system er uforutsigbart i det lange løp (sensitivitet), kan ikke dekomponeres i undersystemer (transitivitet), men har en viss regularitet i og med at det finnes periodiske punkter «nesten overalt».

15 Eksempel. At denne funksjonen er kaotisk på $J = [0, 1)$ er ikke så vanskelig å vise:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (x < 1/2), \\ 2x - 1 & (x \geq 1/2). \end{cases}$$

Nå er riktignok f diskontinuerlig. Egentlig skulle vi lage intervallet J til en sirkel ved å lime sammen punktene 0 og 1. Alternativt kunne vi

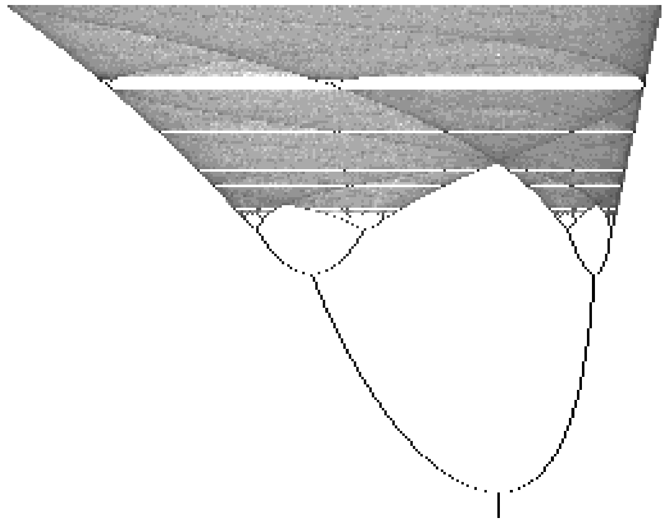
definere f på enhetssirkelen $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ i det komplekse plan ved $f(z) = z^2$ (som simpelthen fordobler vinkelen).

16 Eksempel. Funksjonen $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ gitt ved $f(x) = 4x(1 - x)$ er kaotisk, men dette krever noe mer argumentasjon.

Bifurkasjoner til kaos. *Verhulsts dynamiske system*, gitt ved

$$f_r(x) = (1 + r)x - rx^2,$$

er det klassiske eksemplet på hvordan gjentatt periodefordobling leder til kaos.



Figur 4: Verhulsts dynamiske system. Her varierer r fra 1.95 (nederst) til 3 (øverst), og x fra 0 (venstre side) til 4/3 (høyre side). For hver r-verdi er $\big(f_r^k(x_0), r\big)$ plottet inn i figuren for $k = 5000, \ldots, 9095$. Mørkere punkter er truffet flere ganger av iterasjonen. *Figuren finnes også i farger, med betydelig bedre kvalitet enn her, på følgende URL:* `http://www.math.ntnu.no/~hanche/kurs/dynsys/1997v/verhulst.html`

f_r har to fikspunkter, 0 og 1. For $r > 0$ er alltid fikspunktet i 0 ustabilt ($|f_r'(0)| > 1$) mens fikspunktet i 1 er stabilt for $0 \le r < 2$ og ustabilt for $r > 2$. I det r vokser forbi 2 oppstår en såkalt *bifurkasjon*: Det stabile fikspunktet i $x = 1$ blir til et ustabilt fikspunkt (fortsatt $x = 1$) mens det oppstår en stabil sykel med periode 2 mellom de to punktene

$$x = \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{r}}.$$

I figuren vises dette ved at den vertikale linjen nederst ($x = 1$) deles i to grener. For en større r-verdi skjer en ny bifurkasjon: Denne gangen er det den stabile 2-sykelen som blir ustabil, men samtidig gir opphav til en stabil 4-sykel. Slike bifurkasjoner skjer gjentatte ganger, for verdier $2 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots$: Ved r_k vil en stabil sykel med periode 2^k bli ustabil og gi opphav til en stabil sykel med periode 2^{k+1}. Forholdstallene mellom avstanden mellom på hverandre følgende bifurkasjoner er av spesiell interesse: Det viser seg at

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+2} - r_{k+1}} = 4.66920160910299067185 3\dots$$

hvor tallet på høyresiden, *Feigenbaums konstant*, er det samme for alle kjente dynamiske systemer som går gjennom periodefordoblinger på denne måten ved variasjon av en parameter.[1]

Når r har vokst forbi $\lim_{k\to\infty} r_k$, blir systemet kaotisk, men ikke på et intervall slik vi har definert det her. Man kan også se at det dukker opp *gap* for visse intervaller, der r i disse intervallene gir en ny stabil sykel. I alle tilfeller går denne gjennom nye periodefordoblinger til man har kaos igjen.

For $r = 3$ (helt på toppen av figuren) har vi et dynamisk system på $[0, 4/3]$ som er ekvivalent med Eksempel 16: Om vi setter $h(x) = 4x/3$ er $(h^{-1} \circ f_3 \circ h)(x) = 4x(1 - x)$.

[1] Av og til ser man verdien 4.669201660910 … for Feigenbaums konstant. Dette skyldes en trykkfeil som har spredd seg i litteraturen.