Tegning av fasediagram med Maple

Torbjørn Helvik

Sammendrag

Dette notatet er ment som en hjelp til faget SIF5025 Diff.ligninger og Dynamiske Systemer, og tar for seg hvordan en kan plotte fasediagrammer i Maple.

1 Introduksjon

Når en jobber med dynamiske systemer er det veldig mye som dreier seg om fasediagram. Fasediagrammet til et system gir masse informasjon om systemets oppførsel. Derfor er det ekstremt nyttig å kunne kalkulere dette numerisk. Dette er en beskrivelse av hvordan en kan gjøre dette ved hjelp av Maple. Det kan utvilsomt også gjøres ved hjelp av andre programpakker som Matlab og Mathematica, men disse har jeg ikke brukt til formålet.

2 Grunnleggende plotting

Kommandoen en må bruke for å plotte fasediagram er `DEplot`. Denne har mange opsjoner, og vi hopper rett til et eksempel for å vise hvordan en kan bruke disse. Her plotter vi fasediagrammet til systemet:

$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + 5y^5)$$
$$\dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2)$$

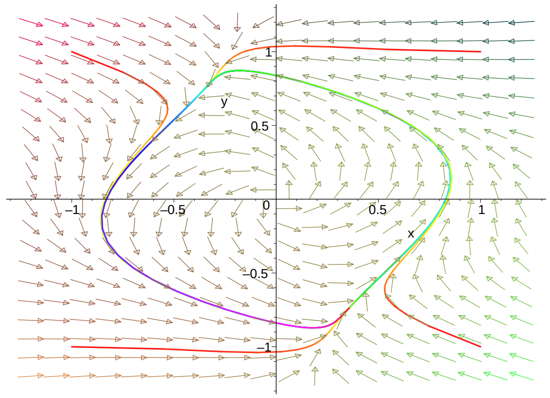
Dette systemet har en grensesykel, som alle baner vil bevege seg mot. Dette ser vi umiddelbart når vi får opp fasediagrammet. Det følgende er klippet direkte ut av Maple:

```
> with(DEtools):
> ODE :=

> [diff(x(t),t)=x(t)-y(t)-x(t)*(x(t)^2+5*y(t)^2),diff(y(t),t)=x(t)+y(t)-

> y(t)*(x(t)^2+y(t)^2)];
```

Sist modifisert: *5. januar 2003*

$ODE :=$
$[\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t) - \mathrm{x}(t)\,(\mathrm{x}(t)^2 + 5\,\mathrm{y}(t)^2),\ \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t) = \mathrm{x}(t) + \mathrm{y}(t) - \mathrm{y}(t)\,(\mathrm{x}(t)^2 + \mathrm{y}(t)^2)]$

```
> DEplot(ODE,[x(t),y(t)],t=0..10,x=-1.2..1.2,y=-1.2..1.2,[[x(0)=-1,y(0)
> =-1],[x(0)=1,y(0)=-1],[x(0)=1,y(0)=1],[x(0)=-1,y(0)=1]],stepsize=.1,co
> lor=[x(t)-y(t)-x(t)*(x(t)^2+5*y(t)^2),x(t)+y(t)-y(t)*(x(t)^2+y(t)^2),.
> 3],linecolor=t,arrows=MEDIUM,method=rkf45);
```



Vi må starte med `with(DEtools)` for å inkludere pakken vi trenger. Så definerer vi systemet av diff.ligninger som en liste. En jobber alltid med difflign-ingsystemer, som oftest todimensjonale.

Det første argumentet til `DEplot` er lista med diff.ligninger. Det andre er en liste over avhengige variable, og det tredje en angivelse av hvilket tidsinterval vi skal plotte over. Så vil vi som oftest angi hvilke intervall x og y skal gå over. Dessuten må vi for å få strømlinjer i faseporterettet angi initialbetingelser for disse. De skal angis som en liste over startpunkt. Vi kan også inkludere andre opsjoner:

Stepsize Angir med hvor store tidsintervaller Maple skal beregne punktene (husk at beregningene er numeriske).

Method Hvilke integrasjonsmetode som skal brukes. Her er Fehlberg fjerde-femte ordens Runge-Kutta metode benyttet. Men det fungerer bra å holde seg til default-metoden (altså å ikke angi noen method selv.)

Arrows Størrelsen på pilene i bakgrunnen på plottet. Kan være `small`, `medium`, `large` eller `none` om en ikke vil ha piler.

Color Dette angir fargene på pilene. Fargen har tre komponenter. Her har vi brukt en triks - nemlig å angi fargens to første komponenter som $\dot{x}$ og $\dot{y}$ ved å angi funksjonsuttrykk av x og y. Dette fører til at fargen på en pil samsvarer med retningen til denne pila.

Linecolor Denne kan en enten angi som en bestemt farge (f.eks. `blue`) eller som en funksjon. Ved å skrive t vil fargen forandre seg lineært med tida. Dvs. linjene starter som røde og fargen beveger seg gjennom fargespekteret mens tida går. Kjekt får å kunne ser hvor lang tid som brukes på de ulike delene av strømningen.

3 Flere plot i samme diagram

La oss anta at vi vil studere systemet:

$$\dot{x} = 1 - (b+1)x + ax^2y$$
$$\dot{y} = bx - ax^2y$$

For å få en en oversikt over hvordan et faseportrett vil se ut, er det ofte lurt å skissere nullklinérene - linjene der enten $\dot{x}$ eller $\dot{y}$ er lik null. Her vil strømmen være hhv. vertikal og horisontal. Der linjene skjærer hverandre har vi likevektspunkt. For å beregne nullklinerene og få dem opp i samme diagram som faseportrettet kan vi gå frem slik:

```
> ligninger := {1-(b+1)*x+a*x^2*y=0,b*x-a*x^2*y=0};
```

$$\mathit{ligninger} := \{b\,x - a\,x^2\,y = 0,\ 1 - (b+1)\,x + a\,x^2\,y = 0\}$$

```
> f1 := unapply(solve(ligninger[1],y),x,a,b);
```

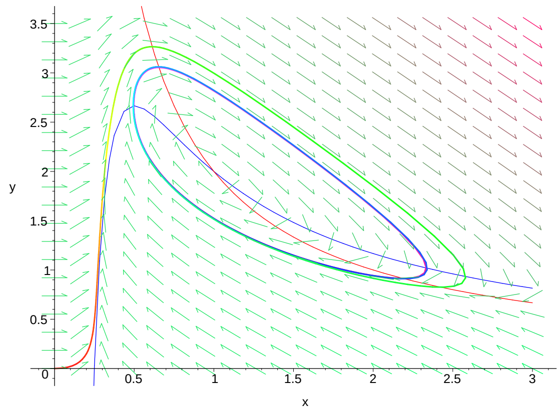
$$\mathit{f1} := (x,\ a,\ b) \to \frac{b}{a\,x}$$

```
> f2 := unapply(solve(ligninger[2],y),x,a,b);
```

$$\mathit{f2} := (x,\ a,\ b) \to \frac{-1 + b\,x + x}{x^2\,a}$$

```
> with(DEtools):
> with(plots):
> a:= 1.5: b :=3.0:
> plot1 :=
> DEplot([diff(x(t),t)=1-(b+1)*x(t)+a*x(t)^2*y(t),diff(y(t),t)=b*x(t)-a*
> x(t)^2*y(t)],[x(t),y(t)],t=0..20,x=0..3,y=0..3.5,[[x(0)=0,y(0)=0]],ste
> psize=0.05,color=[1-(b+1)*x(t)+a*x(t)^2*y(t),b*x(t)-a*x(t)^2*y(t),.4],
> linecolor=t):
> plot2 := plot([f1(x,a,b),f2(x,a,b)],x=0..3,color=[red,blue]):
> display(plot1,plot2);
```

Her ser vi at på den røde linja er stømmen horisontal, og på den blå linja er den vertikal. Også dette systemet har en grensesykel. Maple-funksjonen vi bruker er altså `display` som finnes i pakken `plots`. For å kunne bruke `display` må vi tilordne hvert plott til en variabel.



4 Systemer med dimensjon > 2

Som et eksempel på et tre-dimensjonalt system kan vi ta for oss de kjente Lorenz-ligningene:

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = rx - y - xz$$
$$\dot{x} = xy - bz$$

Dette systemet, som Lorenz konstruerte i 1963, er det første system av diff.ligninger som gir kaotisk oppførsel som ble oppdaget, og ble dermed forløperen til en rik teori. Systemet har ulik type oppførsel for ulike verdier av parametrene b, r og σ. Den enkleste måten å plotte systemet på er å bruke funksjonen `DEplot3d`.

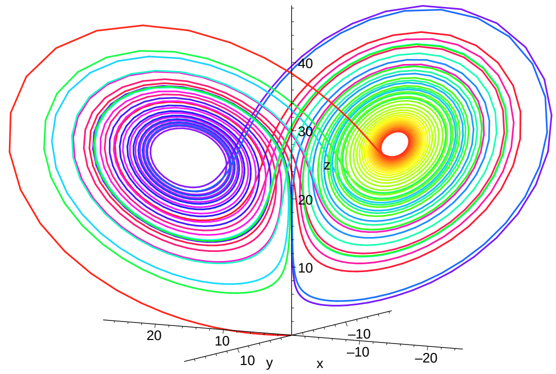
```
> with(DEtools):
> lorentz :=

> {diff(x(t),t)=sigma*(y(t)-x(t)),diff(y(t),t)=r*x(t)-y(t)-x(t)*z(t),di

> ff(z(t),t)=x(t)*y(t)-b*z(t)};
```

$$lorentz := \{\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t) = r\,\mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t) - \mathrm{x}(t)\,\mathrm{z}(t),\ \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{z}(t) = \mathrm{x}(t)\,\mathrm{y}(t) - b\,\mathrm{z}(t),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x}(t) = \sigma\,\mathrm{y}(t) - \sigma\,\mathrm{x}(t)\}$$

```
> sigma := 10: b := 8/3: r:=28:

> DEplot3d(lorentz,{x(t),z(t),y(t)

> },t=0..50,stepsize=.015,[[x(0)=0.1,y(0)=0.1,z(0)=0]],linecolor=t,step

> size=.1,axes=normal,orientation=[120,80]);
```

Opsjonene er veldig lik dem til `DEplot`, bortsett fra at vi har `orientation` i tillegg. Denne angir hvilken synsvinkel du ser det hele fra.

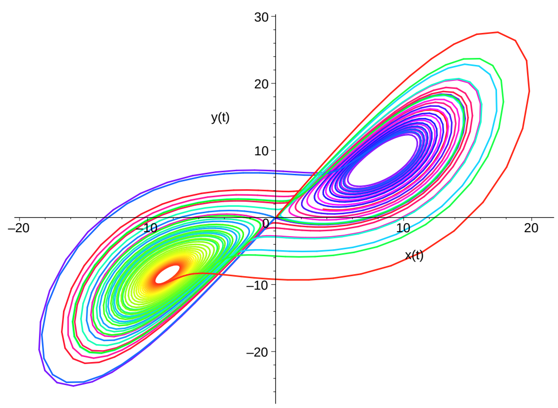
Men det vi også kan gjøre er å bruke vanlig `DEplot`, og så putte på komman-



doen `scene` for å spesifisere hvilke variable som skal vises. F.eks. slik:

```
> sigma := 10: b := 8/3: r:=28;

> DEplot(lorentz,{x(t),y(t),z(t)

> },t=0..50,stepsize=.015,[[x(0)=0.1,y(0)=0.1,z(0)=0]],linecolor=t,step

> size=.1,scene=[x(t),y(t)]);
```

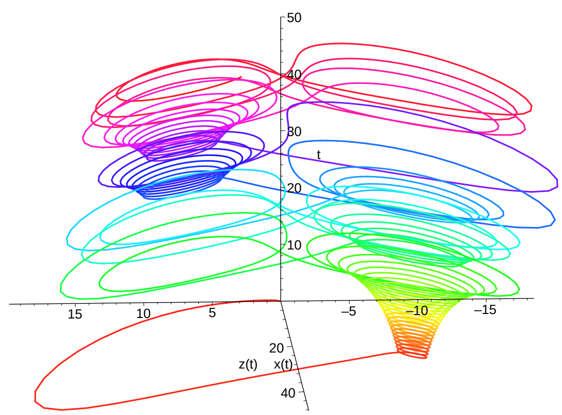
$$r := 28$$



Faktisk kan vi også velge at tiden t skal være på en av aksene, og dessuten kombinere det hele med `DEplot3d`. Plottet under gir en god fremstilling av hvordan bevegelsen går, og demonsterer godt hva fargen til linja betyr.

```
> sigma := 10: b := 8/3: r:=28;

> DEplot3d(lorentz,{x(t),z(t),y(t)

> },t=0..50,stepsize=.015,[[x(0)=0.1,y(0)=0.1,z(0)=0]],linecolor=t,step

> size=.1,axes=normal,scene=[x(t),z(t),t],orientation=[87,69]);
```

$$r := 28$$



50
40
30
t
20
10
15
10
5
–5
–10
–15
20
z(t)
x(t)
40