UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:

Nils A. Baas (59)3519/20

EKSAMEN I FAG 75045 DYNAMISKE SYSTEMER

Onsdag 12. mai 1993
Tid: 0900–1500

Hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator tillatt.
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1 Gitt systemet

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Finn løsningen som er slik at $x(0) = y(0) = z(0) = 1$ ved å benytte eksponentsialavbildningen til en matrise.

Oppgave 2 Skisser faseportrettene for følgende system - løsningskurver skal orienteres.

a)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x - y \\ \dot{y} &= x - 2y \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x - y \\ \dot{y} &= x - 2y \\ \dot{z} &= 3z \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y\\ \dot{y} &= -x - y\end{aligned}$$

Oppgave 3 Fins det periodiske baner i følgende system

(i)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^2 + e^x\\ \dot{y} &= -x + y\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -x + y(1 + x^2 + x^4)\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{y}{1 + x^2}\\ \dot{y} &= \frac{-x + y(1 + x^2 + x^4)}{1 + x^2}\end{aligned}$$

Oppgave 4 Gitt systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xy + y^3\\ \dot{y} &= x + x^2 + xy^2\end{aligned}$$

Fins det periodiske baner om origo?

Oppgave 5 Avgjør om origo er stabil, asymptotisk stabil eller ustabil i følgende to systemer ($n \geq 2$).

a)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + x_2^2 \\
\dot{x}_2 &= x_2 - x_3 - x_3^3 \\
\dot{x}_3 &= -x_3 + x_4 + x_4^4 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{2n-1} &= -x_{2n-1} + x_{2n} + x_{2n}^{2n} \\
\dot{x}_{2n} &= x_{2n} - x_1^{2n+1}
\end{aligned}
$$

b)

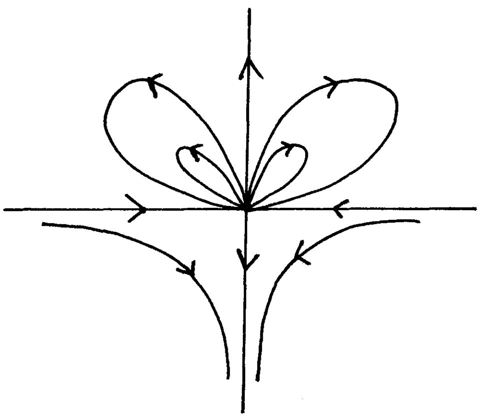
$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^4 \\
\dot{x}_2 &= -x_2^3 + x_3^6 \\
\dot{x}_3 &= -x_3^5 + x_4^8 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= -x_{n-1}^{2n-3} + x_n^{2n} \\
\dot{x}_n &= -x_n^{2n-1} + x_1^{2n+2} x_n
\end{aligned}
$$

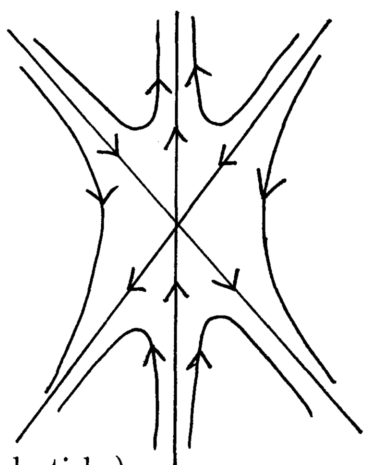
Oppgave 6

a) Bestem indeksen til origo for

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x \\
\dot{y} &= -y
\end{aligned}
\qquad \text{og} \qquad
\begin{aligned}
\dot{x} &= x + x^4 + y^5 \\
\dot{y} &= -y + xy^3
\end{aligned}
$$

b) Bestem indeksen til origo for følgende faseportrett





(En kan godt anta at systemene er analystiske)

Oppgave 7

a) Vis at systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y - x^3 \\ \dot{y} &= x + y - y^3 \end{aligned}$$

har en periodisk bane i det ringformede området i planet
$A_{a,b} = \{(x,y) \mid a \leq x^2 + y^2 \leq b, \text{ hvor } 0 < a < 1 \text{ og } b > 2\}$.

En kan anta at ligningene $\dot{x} = \dot{y} = 0$ ikke har noen løsning i $A_{a,b}$.

b) Betrakt systemet i a) for området $A_{\frac{3}{4},3}$. Forklar hvorfor resultatet i a) i dette tilfellet ikke strider mot Bendixon's (negative) kriterium.

Oppgave 8 Gitt to kvadrater med sidelengde 1. Kvadratene deles opp i 16 like store kvadrater som på figurene A og B. En fjerner så de skraverte delene. Prosessen gjentas så i hver av de resterende delene for begge figurer. Gjør dette n ganger og la så $n \to \infty$.

a) Bestem fraktaldimensjonen til den fremkomne mengden i fig. A.

b) Bestem fraktaldimensjonen til den fremkomne mengden i fig. B.

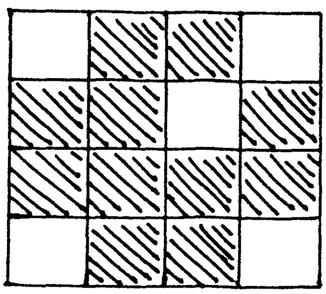


Fig. A.

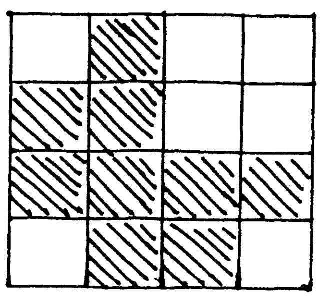


Fig. B.