UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:

Nils A. Baas (7359)3519/20

EKSAMEN I FAG 75045 DYNAMISKE SYSTEMER

Onsdag 1. juni 1994
Tid: 0900–1500

Hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator tillatt.
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

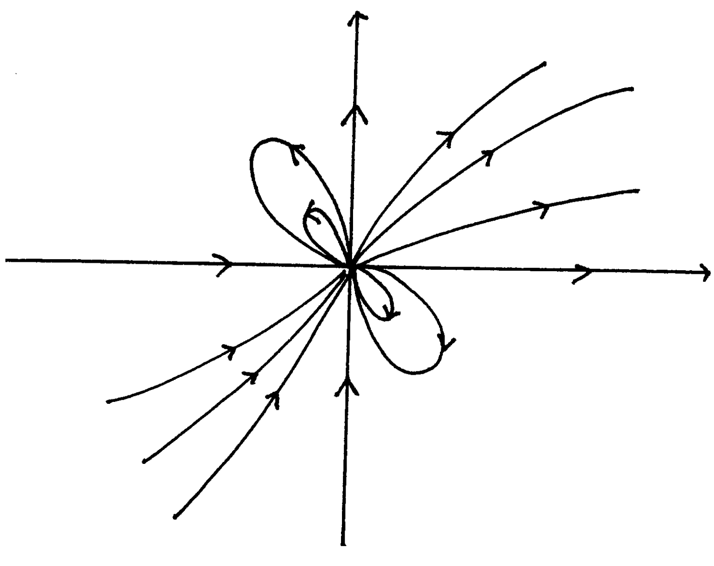
Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1 (Teller som to punkter)

Drøft kort de forskjellige typer likevektspunkter som kan opptre i et 2-dimensjonalt **lineært** dynamisk system ($\dot{x} = Ax$, $x \in \boldsymbol{R}^2$ og A er en reell 2×2-matrise), og skisser faseportrettene rundt disse.

Oppgave 2

a) Gitt følgende faseportrett



Bestem indeksen til origo. En kan godt anta at systemet er analytisk.

b) La $z = x + iy$, og gitt to dynamiske system i det komplekse plan ved

$$\dot{z} = z^k \text{ og } \dot{z} = \bar{z}^k.$$

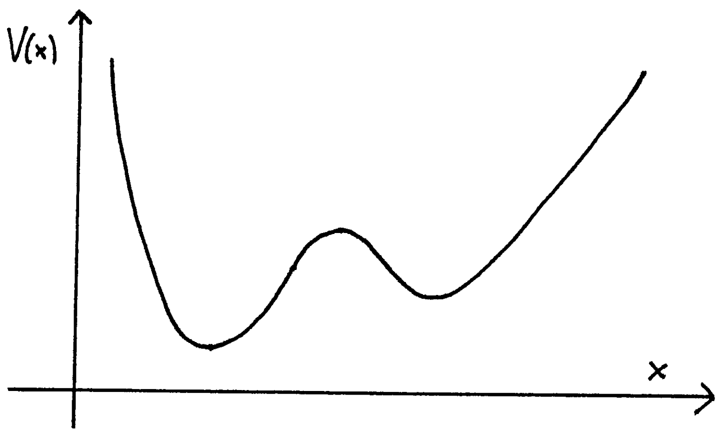
Vis at indeksen til origo er henholdsvis k og $-k$.
Her er $\bar{z} = x - iy$, dvs. kompleks konjugert. (Hint: La $z = re^{i\theta}$ og sett $\dot{x} = Re(z^k)$ og $\dot{y} = Im(z^k)$).

Oppgave 3

a) Definer et Hamiltonsk system i $\boldsymbol{R}^{2n}$, og vis at integralkurvene ligger på bestemte flater.

b) La origo være et brennpunkt (fokus) i et to-dimensjonalt Hamiltonsk system. Vis at da kan ikke origo være et strengt lokalt maksimum eller minimum for den tilhørende Hamiltonfunksjonen.

c) La V være en reell analytisk funksjon med graf som på figuren:



Skisser i grove trekk faseportrettet for det Hamiltonske systemet med Hamiltonfunksjon ("total energi") $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$.

Oppgave 4 Betrakt Lorenz-systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x)\\ \dot{y} &= \rho x - y - xz\\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

med $\sigma > 0$, $\rho > 0$ og $\beta > 0$.

a) Bestem likevektspunktene til systemet for $\rho > 1$, og vis at z-aksen er invariant.

b) Vis at for $\rho \in < 0, 1 >$ er origo et stabilt likevektspunkt.
(Hint: Prøv med en Liapunovfunksjon på formen $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ og velg passende a, b og c).

Oppgave 5 Undersøk om systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y - x(x^2 + y^2)^2 \\ \dot{y} &= -x + 2y - y(x^2 + y^2)^2 \end{aligned}$$

har periodiske løsninger.

Oppgave 6 La $d \in < 1, 2 >$. Konstruer en delmengde av planet $(\boldsymbol{R}^2)$ slik at dens fraktaldimensjon blir d.