Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Nils A. Baas   73 59 35 19

EKSAMEN I FAG 75045 DYNAMISKE SYSTEMER

Lørdag 1. juni 1996
Tid: 0900-1500

Hjelpemidler:
Typegodkjent kalkulator, med tomt minne.
Ingen håndskrevne eller trykte hjelpemidler tillatt.

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

Bestem likevektspunktene til systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

Bestem deres lineære og ikke-lineære type, og skisser faseportrettet.

Fins det en periodisk bane som omslutter alle likevektspunktene?

Oppgave 2

a) Skisser faseportretter rundt et likevektspunkt slik at indeksen blir henholdsvis 4 og -2.

b) La Γ være en bane i et C^1 dynamisk system. Definer grensemengden

$$\omega(\Gamma) \ (= L_\omega(x), \ \ x \in \Gamma.)$$

Skisser et eksempel på en bane Γ slik at $\omega(\Gamma)$ består av tre likevektspunkter og fem grensebaner.

Oppgave 3

Vis at origo er et asymptotisk likevektspunkt for systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(y-b)\\ \dot{y} &= y(x-a)\end{aligned}$$

hvor $a, b > 0$.
Vis videre at alle løsninger som starter i området $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 < 1$ går asymptotisk mot origo.

Oppgave 4

Gitt en C^1 funksjon $V : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

a) Vis at om x_0 er et isolert lokalt minimum for $V(x)$, da er x_0 et asymptotisk stabilt likevektspunkt for gradientsystemet

$$\dot{x} = -\text{grad}\, V(x)$$

(Hint: Finn en passende Liapunov-funksjon.)

b) Anta som kjent at funksjonen

$$V(x, y) = x^2(x-1)^2 + y^2$$

har isolerte, lokale minima i $(0, 0)$ og $(1, 0)$ og en sadel i $(1/2, 0)$. Skisser faseportrettet til systemet

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = -\ \text{grad}\ V(x, y)$$

Oppgave 5

Finn et system

$$\dot{x} = f(x)$$

slik at initialverdiproblemet $x(0) = 0$ har mer enn en løsning. Angi løsningene.

Formuler en betingelse som gir nøyaktig en løsning.

Finn et system med uendelig mange løsninger. Angi løsningene.

Oppgave 6

Systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= -y + x^2 \\ \dot{z} &= z + x^2 \end{aligned}$$

har som løsning

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^{-t} + x_0^2(e^{-t} - e^{-2t}) \\ z(t) &= z_0 e^t + \frac{x_0^2}{3}(e^t - e^{-2t}) \end{aligned}$$

hvor $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ og $z(0) = z_0$. Bestem den stabile og ustabile mangfoldigheten til origo.

Oppgave 7

a) La Γ_0 være en periodisk bane til et C^1 dynamisk system i en åpen mengde $E \subset \mathbf{R}^2$ med $\Gamma_0 \subset E$. La T_0 være perioden til Γ_0 og anta at det fins en følge av periodiske baner $\Gamma_n \subset E$ med periode T_n som inneholder punkter x_n slik at $x_n \to x_0 \in \Gamma_0$ når $n \to \infty$. Vis at $T_n \to T_0$ når $n \to \infty$.

b) Resultatet i a) holder ikke i høyere dimensjoner. Det er imidlertid riktig at dersom $T_n \to T$, da er T et heltallig multiplum av T_0. (Dette skal ikke vises.)
Skisser en periodisk bane Γ_0 i $\mathbf{R}^3$ og en nærliggende bane Γ_n med periode T_n og med $x_n \in \Gamma_n$ slik at $\tau(x_n) = \frac{T_n}{2}$, hvor τ er Poincaré-avbildningen for en passende Poincaré-seksjon.