Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen   73 59 35 25

EKSAMEN I FAG 75045 DYNAMISKE SYSTEMER

Tirsdag 3. juni 1997
Tid: 09:00–15:00

Hjelpemidler: B1
— Typegodkjent kalkulator, med tomt minne
— Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt

Alle svar skal begrunnes

Oppgave 1 Betrakt systemet

$$\dot{x} = y^2 - x^2,$$
$$\dot{y} = 1 + 2xy.$$

a) Bestem likevektspunktene til systemet og bestem deres lineære og ikkelineære type.

Har systemet noen periodiske løsninger?

b) Vis at systemet er Hamiltonsk og bestem en Hamiltonfunksjon for systemet. Vis at banen gjennom origo oppfyller

$$x = \frac{2y^3}{3\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}y^4}\right)}$$

og skissér faseportrettet.
Hint: Del inn planet etter fortegnet til $\dot{x}$ og $\dot{y}$ og pass nøye på hvordan løsningskurvene du tegner går innen hvert område. Du kan spare en del arbeid ved å utnytte symmetrien i systemet.

Oppgave 2 Betrakt systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y - (x^2 + y^2)(x - y),\\ \dot{y} &= y - (x^2 + y^2)(x + y).\end{aligned}$$

a) Hva er lineariseringen av det gitte systemet rundt det kritiske punktet i origo? Forklar hva som menes med strømmen (flow) til et system av differensialligninger og finn strømmen til lineariseringen. Skissér faseplanet for det lineariserte systemet.

b) Vis at det opprinnelige systemet har minst en periodisk bane.
Hint: Polarkoordinater kan komme til nytte.

Oppgave 3 Avgjør om origo er et ustabilt, stabilt eller asymptotisk stabilt likevektspunkt for systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^3 + xy^2,\\ \dot{y} &= -x^3 - x^4 y.\end{aligned}$$

Oppgave 4

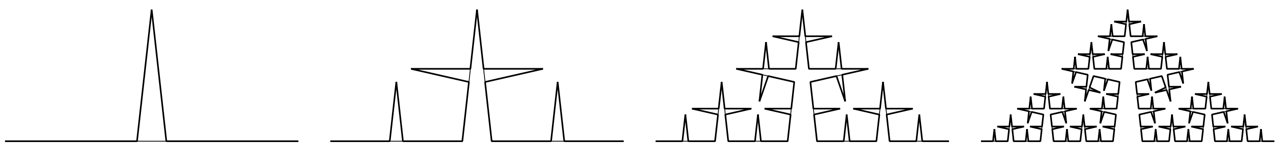
a) Anta f er et C^1 vektorfelt definert i et område $E \subseteq \mathbb{R}^n$, og at H er en C^1 reell funksjon på E slik at $\nabla H(x) \cdot f(x) = g(x)H(x)$ der g er en reell kontinuerlig funksjon. Vis at da er delmengden av E gitt ved $H(x) = 0$ invariant for systemet $\dot{x} = f(x)$.

b) Vis at flaten $xy + z = 0$ er invariant for systemet

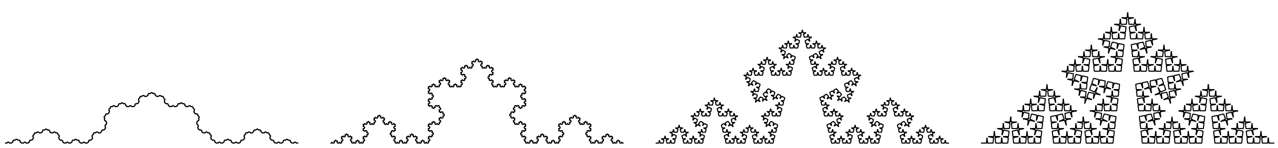
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y + (xy + z)x,\\ \dot{y} &= -2y + (xy + z)y,\\ \dot{z} &= 3xy + y^2 + (xy + z)(1 + x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Beskriv strømmen for systemet på denne flaten. Forklar hva som menes med den stabile og den ustabile mangfoldigheten for et likevektspunkt, og finn disse mangfoldighetene for det gitte systemet. *Hint*: En av dem er en rett linje.

Oppgave 5 La a være en gitt parameter, $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$. Fra et linjestykke av lengde L fjernes et stykke i midten slik at de to gjenværende stykkene begge har lengde aL, og to nye linjestykker av lengde aL legges til slik at de fire linjestykkene tilsammen danner en sammenhengende kurve slik som vist til venstre i figuren.



Gjenta prosedyren med hvert av de fire linjestykkene, igjen med hvert av de resulterende 16 linjestykkene og så videre som antydet i figuren. I grensen får man en kurve C_a (det vil si det finnes en en-til-en kontinuerlig funksjon $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ med $f([0,1]) = C_a$ – men du trenger ikke vise dette). Hva er fraktaldimensjonen D_a til C_a?



Figuren over viser tilnærminger til C_a for $a = 0{,}28$, $a = 1/3$, $a = 0{,}4$ og $a = 0{,}45$. (Nummer to fra venstre, med $a = 1/3$, er den klassiske Koch-kurven.) Hva er $\lim_{a\to 1/4} D_a$ og $\lim_{a\to 1/2} D_a$? Virker resultatet rimelig?

Oppgave 6

a) Hva sier Poincaré-Bendixson-teoremet?

b) Hva er en periodisk attraktor? Anta Γ er en periodisk bane for et dynamisk system i planet og at det finnes punkter x_0 og y_0, ett på innsiden av Γ og ett på utsiden, slik at avstanden fra $\varphi_t(x_0)$ til Γ går mot null når $t \to \infty$ og tilsvarende for $\varphi_t(y_0)$. Gjengi kort, uten å gå i for mye teknisk detalj, et argument for hvorfor Γ er en periodisk attraktor. (Her er φ strømmen (flow) for systemet.)