Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen 73 59 35 25

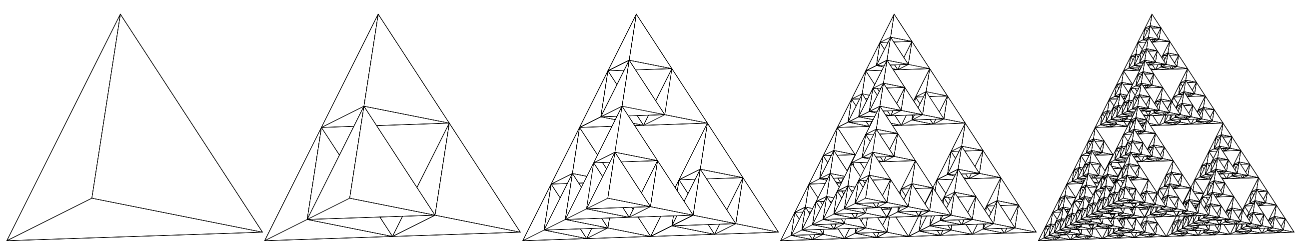
EKSAMEN I FAG 75045 DYNAMISKE SYSTEMER

Tirsdag 19. mai 1998
Tid: 09:00–15:00

Hjelpemidler: B1
— Typegodkjent kalkulator, med tomt minne
— Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt

Alle svar skal begrunnes

Oppgave 1 Midtpunktene til de seks sidekantene i et tetraeder er hjørnene i et oktaeder. Fjernes dette oktaederet fra tetraederet, sitter man igjen med fire mindre tetraedere. Gjenta prosedyren på hvert av småtetraedrene, og så videre, slik at man etter n runder sitter igjen med 4^n tetraedere, hver med sidekanter av lengde 2^{-n} ganger sidekantene i det opprinnelige tetraederet. Hva er den fraktale dimensjonen til mengden («Sierpinskis tetraeder») vi får i grensen når $n \to \infty$?



En større utgave av resultatet etter femte iterasjon finnes på siste side.

Oppgave 2 (Teller som to punkter)

Drøft kort de forskjellige typer likevektspunkter som kan opptre i et todimensjonalt lineært dynamisk system $\dot{x} = Ax$ der A er en ikkesingulær 2×2–matrise, og skissér faseportrettene rundt disse.

Oppgave 3

a) Bestem likevektspunktene og deres lineære og ikkelineære type for systemet

$$\dot{x} = x^2 - y^2,$$
$$\dot{y} = 1 - x^2 - y^2.$$

Finnes det en periodisk bane som omslutter alle likevektspunktene?

b) Skissér et fasediagram for systemet.

Oppgave 4 Undersøk om origo er et asymptotisk stabilt, stabilt, eller ustabilt likevektspunkt for systemet

$$\dot{x} = 2y - x^3,$$
$$\dot{y} = -4x^3.$$

Oppgave 5 Undersøk om systemet

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -x - y - y^3 + \frac{2y}{1 + x^2}$$

har noen periodiske baner.

Oppgave 6 Anta det er gitt et system av differensialligninger på formen

$$\dot{x} = g(x, y) - y^3,$$
$$\dot{y} = h(x, y) - x^3$$

der g og h er C^1–funksjoner med egenskapen at

$$|g(x, y)| \leq A(1 + x^2 + y^2), \quad |h(x, y)| \leq A(1 + x^2 + y^2)$$

for en konstant A. Vis at da har systemet minst ett likevektspunkt. Hva kan du si om dette punktet, dersom det er gitt at det bare finnes ett likevektspunkt, og at det er ikkedegenerert?

Oppgave 7

a) Anta gitt et Lipschitz-kontinuerlig vektorfelt f på en åpen mengde $E \subset \mathbb{R}^n$ og et punkt $x_0 \in E$. Vis at initialverdiproblemet

$$\dot{x}(t) = f\bigl(x(t)\bigr), \quad x(0) = x_0$$

har høyst en løsning for t i et intervall $[0, T]$ med $T > 0$. Gi et eksempel som viser at dette ikke nødvendigvis holder dersom vi utelater betingelsen om Lipschitz-kontinuitet.

b) Hva menes med strømmen (flow) til vektorfeltet f? Hva er de grunnleggende egenskapene til strømmen? Gi et eksempel som viser at strømmen ikke trenger være definert overalt selv om $E = \mathbb{R}^n$.