Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen 73 59 35 25 /20

EKSAMEN I FAG 75045 DYNAMISKE SYSTEMER

Onsdag 19. mai 1999
Tid: 09.00 – 15.00

Helpemidler: B1.
Typegodkjent kalkulator, med tomt minne.
Ingen håndskrevne eller trykte hjelpemidler tillatt.

Alle svar skal begrunnes.

Sensur faller uke 23.

Oppgave 1
Skisser faseportrettene (med orientering) rundt origo til følgende systemer:

i) $\dot{x} = -2x - y$
$\dot{y} = x - 2y$

ii) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -x$

iii) $\dot{x} = xy$
$\dot{y} = -x^2$

Oppgave 2
Avgjør om origo er en stabil, asymptotisk stabil eller ustabil likevektstilstand for følgende systemer:

a) $\dot{x} = y - x^3$
$\dot{y} = -x - y^3$

b) $\dot{x} = x^3 + y^2$
$\dot{y} = -xy + y^3$

c) $\dot{x} = 2x + x^2 + z^3$
$\dot{y} = 3y - y^2 + xz$
$\dot{z} = -4z + x^3 - z^4$

Oppgave 3
Gitt systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(z+1)\\ \dot{y} &= -x(z+1)\\ \dot{z} &= -z^3\end{aligned}$$

a) Vis at origo er en stabil likevektstilstand.

b) Er origo en asymptotisk stabil likevektstilstand?

Oppgave 4
Et dynamisk system er gitt i polarkoordinater ved

$$\dot{\theta} = 1, \quad \dot{r} = \begin{cases} r^2 \sin \frac{1}{r}, & r > 0 \\ 0, & r = 0 \end{cases}$$

Avgjør om origo er en stabil, asymptotisk stabil eller ustabil likevektstilstand. Gi en skisse av faseportrettet rundt origo.

Oppgave 5
Gitt systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y - x\sqrt{x^2+y^2}\\ \dot{y} &= -x + y - y\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

a) Hva slags likevektstilstand er origo i det lineariserte systemet? Vil den være av en annen type i det gitte ikke-lineære systemet?

b) Vis at det gitte systemet har en entydig periodisk bane Γ.

c) Forklar hva vi mener med Poincaré-avbildningen til Γ.

d) Bestem Poincaré-avbildningen til Γ definert på den positive x-aksen.

Oppgave 6

a) Hva sier Poincaré-Bendixson teoremet?

b) La

$$\dot{x} = f(x) \text{ og } \dot{x} = g(x)$$

være to systemer i planet ($x \in \mathbf{R}^2$), der f og g er C^1 funksjoner slik at $\langle f(x),\ g(x)\rangle = 0$ for alle x ($\langle -, - \rangle$ er vanlig euklidisk skalarprodukt).
Vis at dersom $\dot{x} = f(x)$ har en periodisk løsning, da har systemet $\dot{x} = g(x)$ minst en likevektstilstand.

Oppgave 7
Enhetsintervallet $[0, 1]$ deles i 8 like store deler. Annenhver del fjernes. Prosessen gjentas så i de resterende delene. Dette gjøres n ganger, og la så $n \to \infty$. Regn ut fraktaldimensjonen til den fremkomne mengden.