Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontakt under eksamen:
Nils A. Baas 73 59 35 19/20

EKSAMEN I SIF5025 DIFFERENSIALLIGNINGER OG DYNAMISKE SYSTEMER

Mandag 7. mai 2001
Tid: 0900-1500

Tillatte hjelpemidler:
-Typegodkjent kalkulator, med tomt minne.
- Ingen håndskrevne eller trykte hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1

Skisser faseportrettene med orientering til følgende to system

a) $\dot{x} = 3x + 2y$
$\dot{y} = -2x - 2y$

b) $\dot{x} = -x - 5y$
$\dot{y} = x + 3y$

Oppgave 2

Avgjør om origo er et stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt likevektspunkt for følgende system

a) $\dot{x} = -x^3 + y^4$
$\dot{y} = -y^3 + y^4$

b) $\dot{x} = y^3 + x^2 y$
$\dot{y} = x^3 - xy^2$

c) $\dot{x} = -2x - 2y + 2yz$
$\dot{y} = x - y - xz - xz^2$
$\dot{z} = 3xyz - z^3$

d) $\dot{x} = e^{x+y+z} - 1$
$\dot{y} = \sin(x^2 + y + z^2)$
$\dot{z} = x^2 - y^2 - z$

Oppgave 3

La $\mu \in \mathbf{R}$, og gitt systemene

a) $\dot{x} = \mu x + y$
$\dot{y} = -x + \mu y$

b) $\dot{x} = \mu x$
$\dot{y} = x - \mu^2 y$

Skisser de forskjellige faseportrett-typene som kan opptre når μ varierer, og angi bifurkasjonspunktene.

Oppgave 4

a) Skisser et eksempel på et faseportrett rundt et likevektspunkt med indeks henholdsvis -1, $+1$ og $+2$.

b) Bestem indeksen til likevektspunktet origo for systemet
$\dot{x} = 2xy$
$\dot{y} = 3x^2 - y^2$
(Vink: Studer retningene til vektorfeltet som systemet definerer.)

Oppgave 5

Gitt systemet

$\dot{x} = -4y + x^2$

$\dot{y} = 4x + xy^2$

Er origo et stabilt likevektspunkt?

Oppgave 6

La $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 | \, \|x\| \leq 1\}$ ($\| \, \|$ er vanlig euklidisk norm) og la $f : D^2 \to D^2$ være en C^1-funksjon. Vis at f har et fikspunkt (dvs. det finnes en x slik at $f(x) = x$).

(Vink: Se for eksempel på systemet definert ved $\dot{x} = g(x) = f(x) - x$.)

Oppgave 7

Start med intervallet [0, 1], del det i 9 like store deler og nummerer dem 1, 2, 3, ... 9 fra en side. Fjern delene 2, 3, 7 og 9. Da gjenstår tre sammenhengende deler av intervallet, gjenta så konstruksjonen på hver av disse delene. Gjenta denne prosessen n ganger og kall den fremkomne mengden F_n. Sett $F = \lim_{n\to\infty} F_n$. Bestem fraktaldimensjonen til F.