



Kontakt under eksamen:
Nils A. Baas 73 59 35 19/20

EKSAMEN I SIF5025 DIFFERENSIALLIGNINGER OG DYNAMISKE SYSTEMER

Bokmål
Fredag 9. mai 2003
Tid: 0900-1500

Tillatte hjelpemidler:

- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne.
- K. Rottmann: Matematisk formelsamling.

Oppgave 1

Bestem likevektspunktene til følgende system og skisser fase-diagrammene (med orientering)

a) $\dot{x} = y$
 $\dot{y} = -x$

b) $\dot{x} = xy$
 $\dot{y} = -x^2$

c) $\dot{x} = y(1 - x^2)$
 $\dot{y} = -x(1 - y^2)$

Oppgave 2

Avgjør om origo er et asymptotisk stabilt, stabilt eller ustabil likevektspunkt i systemene

a) $\dot{x} = -x^3 - 2xy$
 $\dot{y} = x^2 - 3y^3$

b) $\dot{x} = -x - x^2y$
 $\dot{y} = 2x^2 + y$

Oppgave 3

Gitt systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - xy^2 - x^3 \\ \dot{y} &= -7y + 3x^2y - 2yz^2 - y^3 \\ \dot{z} &= -5z + y^2z - z^3\end{aligned}$$

- a) Vis at origo er et asymptotisk stabilt likevektspunkt.
- b) Vis at enhver løsningskurve vil gå mot origo når $t \rightarrow \infty$ — uansett hvor den starter.

Oppgave 4

Avgjør om null-løsningen til differensialligningen

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - \dot{x} + 2x = \dot{x}(x + \dot{x})$$

er stabil, asymptotisk stabil eller ustabil.

Oppgave 5

- a) Hva menes med lineariseringen (eller den lineære approksimasjon) av et system

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \text{ er } C^1,$$

i et likevektspunkt.

Videre er gitt systemet

(*)
$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^2\end{aligned}$$

- b) Bestem likevektspunktene og typen til lineariseringen i disse.

c) Vis at systemet har en homoklin bane som er gitt ved ligningen

$$y^2 = x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

d) Vis at alle lukkede baner (svarende til periodiske løsninger) ligger innenfor den homokline bane, og alle åpne baner (svarende til ikke-periodiske løsninger) ligger utenfor.

e) Gi en grov skisse av faseagrammet til (*) (med orientering).

Oppgave 6

Bestem indeksen i uendelig for systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= x - y^2\end{aligned}$$

Oppgave 7

Vis at origo er et asymptotisk stabilt likevektspunkt for systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\beta(x^2 - 1)y - x\end{aligned}$$

med $\beta < 0$.

Oppgave 8

Vis at følgende system har en periodisk bane

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - x(x^2 + 2y^2) \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2 + 2y^2)\end{aligned}$$

Oppgave 9

En "skjev" Cantor-mengde konstrueres som følger: start med enhetsintervallet $[0, 1]$, del det i fire like store deler, fjern den tredje delen. Gjenta konstruksjonen med de to resterende delene, og fortsett i det uendelige. Regn ut fraktaldimensjonen til grensemengden.