TMA4165 Differensiallikninger og dynamiske systemer 2007–08–09

Løsningsforslag

Merk at dette løsningsforslaget ikke er grundig kontrollregnet og korrekturlest ennå, så feil kan forekomme. (Tekst i liten skrift, som her, er kommentarer og ikke en del av selve løsningsforslaget.)

Problem 1

a) Matrisen til lineariseringen i origo er $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, som har egenverdier ± 1. Punktet er et sadelpunkt, og derfor ustabilt. (Tilstrekkelig å observere at en egenverdi er positiv.)

b) Matrisen til lineariseringen i origo er $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, som har egenverdier $-\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. Punktet er et stabilt fokus, og derfor asymptotisk stabilt. (Det er tilstrekkelig å bemerke at matrisen har trase $p = -3 < 0$ og determinant $q = 3 > 0$.)

c) Liapunovfunksjonen $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2z^2)$ gir

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} + 2z\dot{z} = -x^2y^4 - x^2z^6 - y^2 + 2y^2z^2 - 2z^{10} - 2y^2z^2 = -x^2y^4 - x^2z^6 - y^2 - 2z^{10} \le 0$$

for alle $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, så likevektspunktet er stabilt. Vi merker oss at alle punkter på x-aksen er likevektspunkter, så systemet er ikke asymptotisk stabilt.

Problem 2

a) Systemet har et lineært senter i origo. Det alene gir ikke at origo er et senter, men i hvert fall må baner i nærheten av origo gå rundt origo flere ganger (dette kan man også se ved å regne ut $\dot{\theta}$ og se at $\dot{\theta} \to 1$ når vi nærmer oss origo). Systemet er symmetrisk under variabelskiftet der (x, y, t) byttes ut med $(-x, y, -t)$. Så en bane som krysser den positive y-aksen vil være symmetrisk om y-aksen. Følger vi den forover og bakover, kommer vi til samme punkt på den negative y-aksen på grunn av symmetrien, så banen er lukket.

b) Divergensen til vektorfeltet $(3x^3y^4 + 5, 2ye^x + x^3)$ er $9x^2y^4 + 2e^x > 0$, så systemet har ingen lukkede baner ved Bendixsons negative kriterium.

c) Systemet studeres best i polarkoordinater: Vi finner

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (x\dot{x} + y\dot{y})/r = r - r^3, \\ \dot{\theta} &= (x\dot{y} - y\dot{x})/r^2 = 1. \end{aligned}$$

Det er da klart at $r = 1$ gir en periodisk bane.

Problem 3

a) $\dot{y} = 0$ gir enten $y = 0$ eller $x = 1$. Setter vi $x = 1$ gir $\dot{x} = 0$ at $y = 1$. Setter vi $y = 0$ gir $\dot{x} = 0$ at $x = 0$ eller $x = -1$. Alt i alt er likevektspunktene: $(-1, 0)$, $(0, 0)$ og $(1, 1)$.

Lineariseringen i $(-1, 0)$ er gitt ved matrisen $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ med egenverdiene -1 og -2. Likevektepunktet er en *stabil node*.

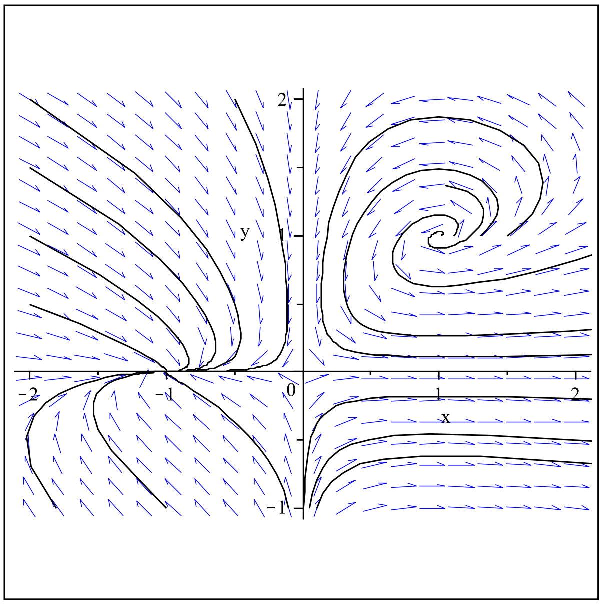
Lineariseringen i $(0, 0)$ er gitt ved matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ med egenverdiene 1 og -1. Likevektspunktet er et *sadelpunkt*.

Lineariseringen i $(1, 1)$ er gitt ved matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ med egenverdiene $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7})$. Likevektspunktet er et *ustabilt fokus*.

b) Det er svært nyttig å merke seg at begge aksene er invariante, $\dot{x} = x + x^2$ på x-aksen og $\dot{y} = -y$ på y-aksen. Så den stabile mangfoldigheten til sadelpunktet i origo er hele y-aksen, mens den ustabile mangfoldigheten er x-aksen fra noden i $(-1, 0)$ til $(\infty, 0)$.

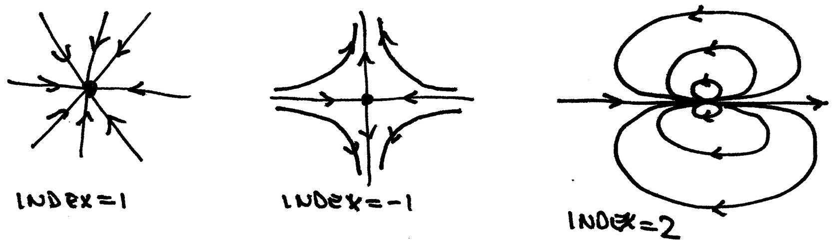
Rotasjonsretningen i fokuset i $(1, 1)$ er i positiv retning, som man ser ved å betrakte et punkt direkte til høyre for fokuset: det beveger seg oppover (det er fortegnet i nederste venstre hjørnet av matrisen til lineariseringen som forteller det).

Hva noden i $(-1, 0)$ angår så vil de fleste banene smyge seg inn til punktet langs egenrommet til egenverdien nærmest null, altså langs x-aksen. Unntaket er to baner – en fra hver side – som vil smyge seg inn langs egenrommet til den andre egenverdien, som har retning $(2, -1)$.



Problem 4

a) (Det første eksemplet kan selvsagt gjøres i mange varianter: en mer generisk node, eller fokus eller senter er de opplagte eksemplene.)



b) Vektorfeltet $(X, Y) = (2xy, 3x^2 - y^2)$ er homogent av annen grad. Vi kan studere hva som skjer med (X, Y) når (x, y) går rundt en vilkårlig sirkel med sentrum i origo. Vi kan se spesielt på der (X, Y) krysser den positive X-aksen, altså der $X > 0$ og $Y = 0$. Nå er $X > 0$ når (x, y) ligger i første eller tredje kvadrant, mens $Y = 0$ på linjene $y = \pm\sqrt{3}x$. Av disse er bare $y = +\sqrt{3}x$ i første og tredje kvadrant. Videre er $Y > 0$ rundt x-aksen, så Y skifter fortegn fra $+$ til $-$ begge ganger når vi krysser linjen $y = +\sqrt{3}x$ på tur rundt origo i positiv retning. Indeksen er altså -2.

Problem 5

Den gitte fraktalen kan beskrives ved fire similituder som avbilder den store trekanten ned på hvert sitt av de gitte fire småtrekantene. Hver similitude har en kontraksjonsfaktor lik a. Vi kan se direkte fra figuren i oppgaven at similitudene er ikke-overlappende. Fraktaldimensjonen D finnes derfor fra formelen

$$4a^D = 1.$$

Tar vi logaritmen her får vi $\ln 4 + D \ln a = 0$, som gir at fraktaldimensjonen er $D = -\ln 4 / \ln a$.