Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen tlf. 73 59 35 25

EKSAMEN i TMA4165 Differensiallikninger og dynamiske systemer

Bokmål
Torsdag 9. august 2007
09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode D): Enkel kalkulator (HP 30S)

Alle svar skal begrunnes.

Sensurdato: 30. august 2007

Oppgave 1 Avgjør om origo er et stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt likevektspunkt for følgende system

a) $$\begin{cases} \dot{x} = x^2 y + x e^y \\ \dot{y} = y^3 - y\cos x \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dot{x} = -x - \sin y + xy \\ \dot{y} = x e^y - 2y\cos x \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \dot{x} = -xy^4 - xz^6 \\ \dot{y} = -y + 2yz^2 \\ \dot{z} = -z^9 - y^2 z \end{cases}$$

Oppgave 2 Avgjør om følgende system (definert i hele planet) har (ikkekonstante) periodiske løsninger

a) $$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 + y^2 \\ \dot{y} = x + x^3 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dot{x} = 3x^3 y^4 + 5 \\ \dot{y} = 2y e^x + x^3 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Oppgavene fortsetter på baksiden av arket.

Oppgave 3 Gitt systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + x - 2y)x \\ \dot{y} = (x - 1)y \end{cases}$$

a) Bestem og klassifiser likevektspunktene til systemet.

b) Skisser fasediagrammet til systemet. Angi retning på fasekurvene.

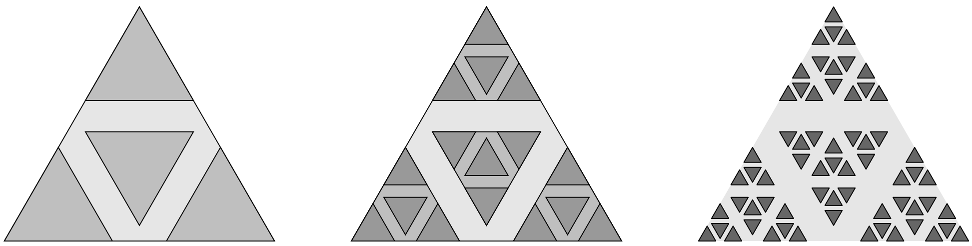
Oppgave 4

a) Skisser et eksempel på et faseportrett rundt et likevektspunkt med indeks henholdsvis 1, -1 og 2.

b) Bestem indeksen til likevektspunktet i origo for systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = 3x^2 - y^2 \end{cases}$$

Oppgave 5 Figuren til venstre viser en likesidet trekant med sidekant 1 og fire likesidede deltrekanter, hver med sidekant a der $0 < a < \frac{1}{2}$.



En fraktal mengde dannes ved at alt fjernes fra den store trekanten unntatt de fire mindre trekantene, slik at vi står igjen med den litt mørkere delen av figuren til venstre. Deretter fjernes alt fra hver av de mindre trekantene unntatt fire trekanter i hver, tilsvarende i den store trekanten, slik at vi står igjen med den enda litt mørkere delen av figuren i midten. Denne prosessen gjentas i det uendelige, og fraktalen er mengden vi sitter igjen med til slutt.

Beregn fraktaldimensjonen til mengden.