



Faglig kontakt under eksamen:
Peter Lindqvist tlf. 73 59 35 29

EKSAMEN i TMA4165 Differensiallikninger og dynamiske systemer

Bokmål

Fredag 25. mai 2007

09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode D): Enkel kalkulator (HP 30S)

Alle svar skal begrunnes.

Sensurdato: 15. juni 2007

Oppgave 1 Avgjør om origo er et stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt likevektspunkt for følgende system

a)
$$\begin{cases} \dot{x} = -xy + \sin x \\ \dot{y} = xy - y \cos y \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y + x^3 \\ \dot{y} = x - 2y + y^3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \dot{x} = -2y - 2xy \\ \dot{y} = x + x^2 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - x^7 y^2 z^{10} + x^2 y \\ \dot{y} = -y^5 - x^3 - yz^4 \\ \dot{z} = -z^7 - x^2 y^4 z^5 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 y^2 - x^2 y \\ \dot{y} = xy^2 \end{cases}$$

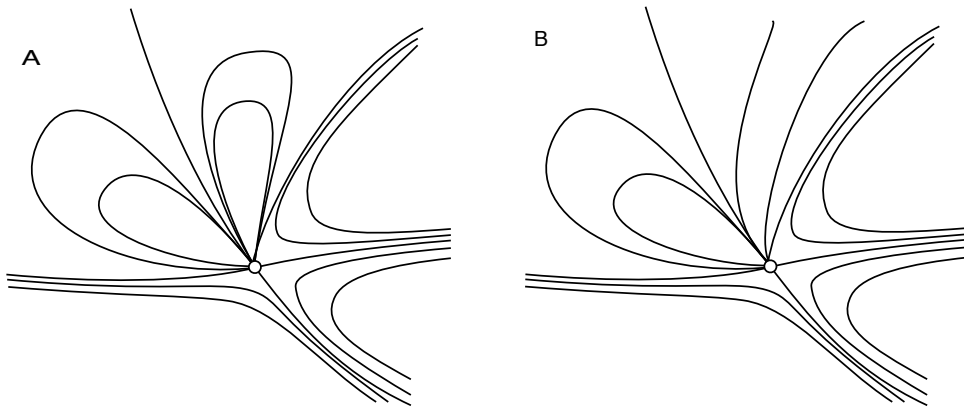
Oppgave 2 Gitt systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \frac{3}{4}x \\ \dot{y} = x - x^3 + \frac{3}{4}y \end{cases}$$

- Vis at systemet er Hamiltonsk, og bestem en Hamiltonfunksjon for systemet.
- Finn og klassifiser likevektspunktene til systemet.
- Skissér et faseagram for systemet.

Oppgave 3

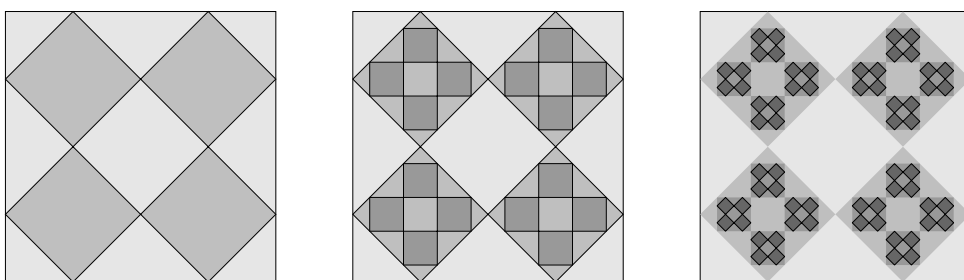
- a) Av disse to figurene viser den ene et fase­diagram rundt et isolert likevektspunkt, mens den andre figuren ikke kan være et slikt fase­diagram. Hvilken figur kan forestille et likevektspunkt, og hva er indeksen i likevektspunktet? Og hvorfor kan ikke den andre figuren forestille et likevektspunkt?



- b) Forklar hvorfor det alltid må finnes minst ett likevektspunkt innenfor en lukket bane (forutsatt at innsiden av banen er inneholdt i definisjonsområdet til vektorfeltet). Kan likevektspunktet i punkt **a** være det eneste likevektspunktet innenfor en slik lukket bane?

Oppgave 4 Avgjør om differensiallikningen $\ddot{x} + (\sqrt{1+x^4} - 2)\dot{x} + xe^{-|x|} = 0$ har noen periodiske løsninger (utenom null-løsningen).

Oppgave 5 Figuren til venstre viser et kvadrat og fire delkvadrater, som hver har to hjørner på sidekantene til det store kvadratet og som berører to andre delkvadrater i et hjørne. Alle vinklene i figuren er rette eller 45° .



En fraktal mengde dannes ved at alt fjernes fra det store kvadratet unntatt de fire mindre kvadratene, slik at vi står igjen med den litt mørkere delen av figuren til venstre. Deretter fjernes alt fra hvert av de mindre kvadratene unntatt fire delkvadrater av hver, tilsvarende i det store kvadratet, slik at vi står igjen med den enda litt mørkere delen av figuren i midten. Denne prosessen gjentas i det uendelige, og fraktalen er mengden vi sitter igjen med til slutt.

Beregn fraktaldimensjonen til mengden.