

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen tlf. 73 59 35 25

EKSAMEN i TMA4165 Differensiallikninger og dynamiske systemer

Bokmål

Torsdag 5. juni 2008

09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode D): Enkel kalkulator (HP 30S)

Alle svar skal begrunnes.

Sensurdato: 26. juni 2008

Oppgave 1 Vis at origo er et asymptotisk stabilt likevektspunkt for systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + y - 2yz \\ \dot{y} &= -2x - y + 2xz - xz^2 \\ \dot{z} &= 3xyz - z^5 + 6xy\end{aligned}$$

Oppgave 2 Betrakt systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y^2 \\ \dot{y} &= -y + y^3\end{aligned}$$

- Bestem og klassifiser likevektspunktene til systemet, og tegn et fasediagram.
- Vis at systemet ikke har noen ikke-konstante periodiske løsninger.

Oppgave 3 (Teller som to punkter.) Vis ved skisser hvordan fasediagrammet (med orientering) til systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - \mu x + y \\ \dot{y} &= -x - y + \mu y\end{aligned}$$

varierer med det reelle tallet μ .

Oppgavene fortsetter på baksiden av arket.

Oppgave 4

a. Vis at systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y(1 + e^{-x}) \\ \dot{y} &= e^{-x}(y^2 - 1)\end{aligned}$$

er Hamiltonsk, og finn en Hamiltonfunksjon for systemet.

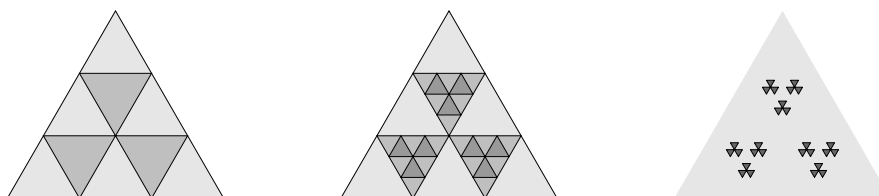
b. Finn en ligning for de to fasekurvene som skiller de fasekurvene som krysser x -aksen fra de øvrige. Skissér fasediagrammet for systemet.

Oppgave 5 For alle likevektspunkter til systemet

$$\ddot{x} + \dot{x} + (\mu^2 - x)(\mu - x^2) = 0$$

for alle reelle verdier av μ , bestem når disse er stabile og når de er ustabile. Skissér resultatet i (μ, x) -planet.

Oppgave 6 Figuren viser en likesidet trekant delt i ni mindre, like store trekanter.



En fraktal mengde dannes ved at alt fjernes fra den store trekanten unntatt tre av de mindre trekantene, slik at vi står igjen med den litt mørkere delen av figuren til venstre. Deretter fjernes alt fra hver av de mindre trekantene unntatt tre trekanter i hver, tilsvarende i den store trekanten, slik at vi står igjen med den enda litt mørkere delen av figuren i midten. Denne prosessen gjentas i det uendelige, og fraktalen er mengden vi sitter igjen med til slutt.

Beregn fraktaldimensjonen til mengden. Beregn også fraktaldimensjonen til mengden som dannes ved i stedet å beholde de seks mørke trekantene som antydnet i figuren nedenfor, og tilsvarende på hvert trinn deretter.

