



Faglig kontakt under eksamen:  
Peter Lindqvist tlf. 73 59 35 29

EKSAMEN i TMA4165 Differensiallikninger og dynamiske systemer

Bokmål

Torsdag 4. juni 2009

09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode D): Enkel kalkulator (HP 30S)

Alle svar skal begrunnes.

Sensurdato: 25. juni 2009

**Oppgave 1** Skissér faseagrammet, med orientering, for disse systemene:

a. 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 4y, \\ \dot{y} = 4x - 5y. \end{cases}$$

**Oppgave 2** Avgjør om disse systemene har ikke-konstante periodiske løsninger:

a. 
$$\begin{cases} \dot{x} = xy^2 + x^2y + y^3, \\ \dot{y} = -xy^2 - y^3 + x^3. \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} \dot{x} = x - (x^3 + y)(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = y - (y^3 - x)(x^2 + y^2). \end{cases}$$

c. 
$$\ddot{x} + \frac{(1 + \dot{x})x}{1 + x^2} = 0$$

*Oppgavene fortsetter på baksiden av arket.*

**Oppgave 3** Betrakt systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y^2 + 1, \\ \dot{y} &= x + y^2 - 1.\end{aligned}$$

- Finns og klassifiser likevektspunktene til systemet.
- Skissér faseagrammet for systemet, med orientering.

**Oppgave 4** Finn indeksen til alle likevektspunktene for systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy(x - y^2), \\ \dot{y} &= (x + y^2)(y - x^3)\end{aligned}$$

og vis at systemet mangler ikke-konstante periodiske løsninger.

**Oppgave 5**

- Gjengi definisjonen av fraktal dimensjon, og vis at ingen kompakt mengde i planet kan ha fraktal dimensjon større enn 2. (*Hint*: Dekk en kompakt mengde  $K$  med et rutenett der rutene er kvadrater med sidekant  $\varepsilon$ .)
- La en kompakt mengde i planet være generert av  $n$  ikke-overlappende similituder, alle med samme kontraksjonsfaktor  $s$ . Bruk resultatet fra punkt **a** til å gi en øvre grense for  $s$ .

Et iterert funksjonssystem er gitt ved de tre similitudene

$$S_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{s}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

der de tre punktene  $(a_i, b_i)$  er hjørner i en likesidet trekant. Figuren viser resultatet av sju iterasjoner fra en trekant (vist med blått) for henholdsvis  $s = 0.52$ ,  $s = 0.54$  og  $s = 0.56$ . (Merk at  $1/\sqrt{3} = 0.57735\dots$ )

Kommentér figuren i lys av den øvre grensen for  $s$  du har funnet.

