Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen 73 59 35 25

EKSAMEN I FAG 75048 MATEMATISK MODELLERING

Mandag 11. januar 1999
Tid: 09:00–15:00

Hjelpemidler: B1
— Typegodkjent kalkulator, med tomt minne
— Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt

Oppgavesettet har 11 punkter.
Kun dine ti beste regnes med i bedømmelsen.

Oppgave 1

a) Hva sier Buckinghams pi-teorem?

b) For vannbølger på dypt vann kan det synes rimelig at bølgehastigheten V kun avhenger av bølgelengden L, tyngdens akselerasjon g og vannets tetthet ρ. Hva er den mest generelle formen denne avhengigheten kan ha, om antagelsen er korrekt? Gjør det samme for svært korte bølger (krusninger), hvor vi antar at g ikke spiller noen rolle men at det i stedet er overflatespenningen σ som er bestemmende.

c) For en middels kort bølgelengde L_0 vil tyngdekraften og overflatespenningen ha omtrent lik innflytelse på bølgeutbredelsen. Anslå en omtrentlig verdi for L_0.

Overflatespenningen for vann er $\sigma \approx 0.07\,\mathrm{N/m}$.

Oppgave 2 Viktige parametre ved bedømmelsen av matvarer som kjøtt og fisk er vanninnhold og fettinnhold. Til hjelp i kvalitetskontrollen er det et behov for instrumenter som raskt og pålitelig kan gi en omtrentlig verdi for disse parametrene. Særlig er det en fordel om testen kan gjøres ikkedestruktivt, slik at målinger kan gjøres i butikken og varen kan selges etterpå. Ett forslag til et slikt instrument utnytter at vann, fett og proteiner har forskjellige termiske egenskaper. Idéen er å tilføre en kjent mengde energi i form av varme til et lite område på overflaten av matvaren, og så måle den resulterende temperaturøkningen. For at instrumentet skal være nyttig, bør følgende to krav oppfylles:

1. Målingen bør ikke ta stort lenger tid enn et halvt minutt.
2. Målingen bør gi representative gjennomsnittsverdier for vann- og fett-innhold ikke bare i overflaten, men ned til en cm eller dypere.

Tilnærmede verdier for spesifikk varmekapasitet og varmeledningsevne til de aktuelle bestanddeler er som følger:

			Vann	Fett	Protein
Varmekapasitet	c	$\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$	4180	2000	1300
Varmeledningsevne	k	$\mathrm{J\,m^{-1}\,K^{-1}\,s^{-1}}$	0.56	0.09	0.16

Du kan regne tettheten til $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ for alle tre. Undersøk ved enkel dimensjonsanalyse om det virker sannsynlig at vi kan oppfylle de gitte kravene med et slikt instrument.

Oppgave 3 Enhver løsning til Duffings ligning

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \qquad (\text{med } \varepsilon > 0)$$

er begrenset, fordi $\dot{u}^2 + u^2 + \frac{1}{2}\varepsilon u^4$ er konstant. Likevel vil et naivt forsøk på en perturbasjonsutvikling lede til ubegrensede tilnærmede løsninger, som vi skal se nedenfor. Årsaken er at løsningene er periodiske, og vi må ta hensyn til at perioden blir avhengig av ε for å få til en generelt gyldig tilnærming.

Bytt derfor ut den uavhengige variabelen t med τ, der $t = (1+\varepsilon c_1+\mathcal{O}(\varepsilon^2))\tau$. Still opp ligningene for de to første leddene i en resulterende perturbasjonsutvikling $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, der du antar initialbetingelsene $u(0) = a$ og $\dot{u}(0) = 0$. Løs disse ligningene for u_0 og u_1, og vis at det sekulære (det vil si ubegrensede) leddet i u_1 forsvinner dersom c_1 velges riktig. Hva blir perioden for løsningen, til første orden i ε?

Formelen $\cos^3\tau = \frac{1}{4}\cos 3\tau + \frac{3}{4}\cos\tau$ kan komme til nytte.

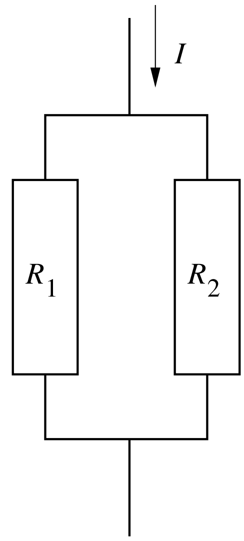
Oppgave 4 Bruk singulær perturbasjon til å finne en tilnærmet løsning til

$$\varepsilon u'' - (2 - x^2)u + 1 = 0, \qquad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

gyldig for små ε og x i intervallet $0 \le x \le 1$.

Oppgave 5 Ved produksjon av ferrosilisium brukes elektroder som bakes av en karbonpasta og forbrukes i ovnen i en kontinuerlig prosess. Man er litt bekymret for at elektroden kan bli ujevnt bakt, fordi en godt bakt del av elektroden har mye større elektrisk ledningsevne enn en ubakt en. Dette kan lede til at det meste av elektrodestrømmen går gjennom den delen som allerede er godt bakt, som dermed blir enda varmere på bekostning av den ubakte delen. Vi skal se på en sterkt forenklet modell som forhåpentligvis kaster lys over den grunnleggende mekanismen uten å gjøre noe forsøk på å modellere fenomenet i full detalj.

Vi betrakter to temperaturavhengige motstander, med motstandsverdi $R^*(T_j^*)$ (for $j = 1, 2$). Disse er koblet i parallell, og en foreskrevet strøm I sendes gjennom kretsen. Dette vil varme opp motstandene, noe som i sin tur endrer motstandsverdien og dermed spenning og avgitt effekt. Vi antar de to motstandene er identiske, med varmekapasitet C. De avgir termisk energi til omgivelsene med en rate som er A ganger forskjellen mellom egen og omgivelsens temperatur, og den varmeste av de to avgir termisk energi til den kaldeste med en rate som er B ganger temperaturforskjellen dem i mellom. (Varmeovergangen til omgivelsene burde muligens vært gitt ved en strålingslov, altså proporsjonal med en differanse mellom fjerdepotenser av temperaturene – men dette bare kompliserer modellen unødig, og bidrar ikke med noe vesentlig innsikt. Jeg tillater meg for øvrig å minne om Ohms lov $U = RI$ og at en strøm I levert mot en spenning U avgir en effekt $P = UI$.)



a) Skriv opp ligninger (med begrunnelse) som beskriver utviklingen av temperatur og strøm i de to motstandene, og forklar hvordan en passende reskalering leder til et system på formen

$$\begin{aligned} \dot{T}_j &= R(T_j)I_j^2 - T_j - \beta(T_j - T_{3-j}) \quad (j = 1, 2) \\ R(T_1)I_1 &= R(T_2)I_2 \\ I_1 + I_2 &= 1 \end{aligned}$$

der R er en funksjon, β er en konstant, og $\dot{T}_j = dT_j/dt$.

b) Anta at modellen ovenfor har et symmetrisk likevektspunkt, altså $\dot{T}_j = 0$ med $T_1 = T_2$. Vis at dette likevektspunktet er stabilt hvis og bare hvis $-4(1 + 2\beta) < R'(T_1) < 4$. (Her er R' den deriverte av funksjonen R. Det er for øvrig instabiliteten for store negative verdier av R' som er relevant for problemet forklart innledningsvis. *Hint*: Bruk de algebraiske ligningene til å eliminere I_1 og I_2 fra modellen, slik at du står igjen med et todimensjonalt dynamisk system (to førsteordens differensialligninger). Lineariser dette rundt likevektspunktet.)

Oppgave 6 I denne oppgaven skal vi legge til grunn modellen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \qquad \text{der } f(u) = u - u^2$$

for trafikk langs en vei, der $u(x,t)$ er tettheten av biler. (Modellen er neppe kvantitativt korrekt, men kvalitativt er den det. Den er lett å regne på, og derfor mye brukt.)

a) Gjør kort rede for hvilke antagelser som ligger til grunn for modellen, forklar hvordan den utledes, og angi hvilken skalering som brakte den på ovenstående form.

b) Hva sier Rankine-Hugoniot betingelsen for hastigheten til et sjokk? Skissér karakteristikker og sjokk for løsningen til modellen med initialbetingelser

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{hvis } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{4} & \text{ellers.} \end{cases}$$

Pass på å ikke få med ufysikalske sjokk i løsningen. Du trenger ikke regne ut løsningen i detalj i dette eller neste punkt.

c) Vi tenker oss nå at veien initielt er jevnt belagt med trafikk som holder tettheten u_0, der $0 < u_0 < \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Ved tiden $t = 0$ ankommer en ferge som slipper ut en strøm av biler på veien ved $x = 0$. Vi skal anta at den nye trafikken blandes med den gamle ved fletting, slik at det oppstår en stasjonær diskontinuitet i $x = 0$ som oppfyller

$$f(u(0+,t)) = 2f(u(0-,t))$$

hvor $u(0\pm,t)$ er ensidige grenseverdier for u i $x = 0$. (Denne diskontinuiteten oppfyller ikke Rankine-Hugoniot-betingelsen, siden antall biler ikke er bevart i $x = 0$. Men det virker likevel urimelig å bruke løsninger med $u(0+,t) < u(0-,t)$.) Skissér karakteristikker og sjokk for en løsning av problemet. Hvordan endrer løsningen seg dersom $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} < u_0 < \frac{1}{2}$, eller $u_0 > \frac{1}{2}$? (Den magiske verdien $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$ er en løsning til $f(u) = \frac{1}{8}$. Den største verdien til f er $\frac{1}{4}$.)