Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald E. Krogstad
Telefon: 73 59 35 36

EKSAMEN I FAG 75048 MATEMATISK MODELLERING

Bokmål
Mandag 10. januar 2000
Kl. 09-15

Hjelpemidler: B1, Typegodkjent kalkulator med tomt minne
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt

Sensuren faller i uke 5.

Oppgave 1

I en isolert oljerørledning antas isolasjonen å være homogen mellom indre (r_1) og ytre (r_2) rør-radius, og ha konstante materialegenskaper og varmeledningskoeffisient k. Varmetransporten gjennom isolasjonen er radiell.

(a) Bestem temperaturen i isolasjonen under stasjonære forhold når $T(r_1) = T_1$ og $T(r_2) = T_2$. Vis at varmetapet fra oljen gjennom isolasjonen pr. rørlengde og tidsenhet kan skrives på formen

$$\alpha(T_1 - T_2), \tag{1}$$

der α avhenger av $r_1,\ r_2$ og k.

(b) Anta at varmetapet fra oljeledningen beskrives av lign. (1) også generelt, at $T = T_1$ faller sammen med oljetemperaturen og T_2 ($\equiv 0$) med omgivelsestemperaturen. Sett opp ligningen for temperaturen i oljen hvis temperaturen kun er en funksjon av z og t, og oljen strømmer med konstant hastighet $V > 0$. Bestem den stasjonære løsningen, $T(z)$, $z \geq 0$, når temperaturen ved $z = 0$ er konstant lik T_0 og vi ser bort fra varmediffusjon i oljen langs røret. Finn derfra en lengdeskala for temperaturvariasjonene i oljen.

Varmeledningsligningen for sylindersymmetriske problemer har formen

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

Oppgave 2

Vi betrakter en (islagt) sjø med origo i overflaten og z-aksen pekende nedover. Tykkelsen på isen er gitt av $z = s(t)$. Når vann fryser ved $T = 0$, frigjøres smeltevarme L, $[L] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$. Vi skal for enkelhets skyld anta at tetthet, ρ, spesifikk varme, c, og varmeledningskoeffisient, k, er de samme for vann og is. Varmeledningsligningen står i oppgave 1.

(a) Vis at i tillegg til at $T = 0$, må følgende betingelse gjelde på grensen mellom is og vann:

$$-\frac{\partial T}{\partial z}(s+) + \frac{\partial T}{\partial z}(s-) = \frac{\rho L}{k}\frac{ds}{dt} \tag{2}$$

I praksis vil en modellere varmefluksen mellom isen og lufta som en konvektiv fluks på formen $j_{il} = -\alpha_{il}(T(0+) - T_l)$, der T_l er lufttemperaturen. Varmetransport fra sjøvannet til isen beskrives på samme måten ved $j_{wi} = -\alpha_{wi}(T_w - 0)$, der T_w er temperaturen i vannet utenfor selve frysesonen.

(b) Sett opp ligningen for temperaturen i isen og randbetingelsene når vi antar at $T_l < 0$ er konstant, $T_w \equiv 0$, og α_{il} er meget stor. Parametre i problemet er T_l, $\kappa = \frac{k}{\rho c}$, $[\kappa] = \frac{m^2}{s}$, og $\lambda = \frac{\rho L}{k}$, $[\lambda] = \frac{sK}{m^2}$. Benytt dimensjonsargumenter til å konkludere med at z og t kun forekommer i kombinasjon, f.eks. $\eta = z/\sqrt{\kappa t}$, og at is-tykkelsen s er proporsjonal med $t^{1/2}$.

(c) Benytt resultatet i (b) til å vise at temperaturen i isen er løsning av ligningen

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\eta\frac{dT}{d\eta} = 0. \tag{3}$$

Sett $s = A\sqrt{\kappa t}$, og vis hvordan temperaturen i isen kan finnes ved i tillegg å løse en transcendent ligning for A (det er *ikke* mulig å løse ut A eksplisitt).

(Generell løsning av lign. (3) kan skrives $T(\eta) = C_1 + C_2\,\mathrm{erf}(\eta/2)$, der $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$)

Oppgave 3

(a) Endimensjonale bevarelsesligninger leder ofte til første orden partielle differensialligninger på formen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Riemannproblemet for disse ligningene består i å finne $\rho(x,t)$ for $t > 0$ når

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_1\,, & x < 0, \\ \rho_2\,, & x > 0. \end{cases}$$

Forklar kort hvilke elementære situasjoner vi kan få, og hvordan løsningene kan finnes i disse tilfellene.

Vi betrakter en seig væske med tetthet ρ som strømmer nedover et skråplan med helningsvinkel α under påvirkning av tyngdekraften. La x-aksen peke nedover langs skråplanet, og la y-aksen peke oppover, ortogonalt på skråplanet. Væskehastigheten antas overalt å være rettet i x-retningen med hastighet $u = u(y)$, og $u(0) = 0$. Skjærspenningen τ i væsken på et plan parallelt med skråplanet er gitt ved $\tau(y) = \mu\frac{du}{dy}$ (Skjærspenning τ er kraft pr. flateenhet. Konstanten μ er væskens viskositet).

(b) Anta at strømningen er stasjonær, og at tykkelsen på væsken er konstant lik h. Velg et kontrollvolum mellom y og overflaten h, og vis ved en enkel kraftbalanse at $\tau = (h-y)\rho g \sin\alpha$. Vis deretter at den totale volum-mengde $Q(h)$ som passerer et fast punkt på planet pr. bredde- og tidsenhet er gitt ved

$$Q(h) = \frac{\rho g \sin\alpha}{3\mu} h^3. \tag{4}$$

(c) Anta at lign. (4) holder selv om h varierer. Sett opp bevarelsesloven for væsken på differensialform. Vis at med gitte skalaer H og X for h og x, fins en skala for t slik at loven blir

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{3}\right) = 0. \tag{5}$$

(d) Vi skal løse lign. (5) i første kvadrant når

$$h(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{for } x > 0,\ t = 0, \\ \sqrt{t} & \text{for } x = 0,\ t \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Skissér karakteristikkene, og vis at et punkt (x,t) ligger på karakteristikken fra punktet $(0,t_0)$ hvis og bare hvis

$$t_0 = \frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{t^2}{4} - x}.$$

(e) Løsningen i (d) utvikler et sjokk, $(s(t), t)$, der karakteristikken fra $\left(0, \frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} - s(t)}\right)$ møter en karakteristikk fra x-aksen. Finn en differensialligning for sjokkhastigheten, verifisér at $s(t) = 5t^2/36$ er løsning, og angi til slutt den fullstendige løsningen på problemet.

Oppgave 4

Jordas atmosfære, de øvre lag (ned til ca. 20m) av havet og de øverste metrene av jordskorpen utgjør en masse M på ca. 3×10^{18} kg. Det er denne massen som kontinuerlig mottar varme fra sola og avgir varme til verdensrommet. Den aller enkleste modellen for gjennomsnittstemperaturen på jorda er

$$\frac{Mc}{4\pi R^2}\frac{dT}{dt} = Q_0 - \sigma T^4,$$

der R er jordradien, c er gjennomsnittlig spesifikk varme, Q_0 er gjennomsnittlig innstråling pr. flateenhet fra sola og σ er Stefan-Bolzmanns konstant. I oppgaven kan en bruke $Q_0/\sigma = (260\mathrm{K})^4$ og $\frac{Mc}{4\pi R^2 \sigma} = 5 \times 10^9 \mathrm{døgn} \times \mathrm{K}^3$.

(a) Gjør rede for modellen. Finn likevektstemperaturen T_0, vis at den er stabil overfor forstyrrelser, og anslå tiden det tar for en forstyrrelse fra likevektstemperaturen å dø ut.

Modellen i (a) gir en heller kjølig verden, men atmosfære og skyer hindrer utstrålingen, slik at σT^4 endres til $\sigma \varepsilon T^4$, der emmissiviteten ε er mindre enn 1. Mengden av absorbert stråling fra sola avhenger blant annet av overflatens farge. Under istider, når en relativt større del av jorda er snø- og isdekt, vil gjennomsnittlig absorbert energi være mindre. Leddet Q_0 er derfor foreslått modifisert til

$$Q_0 + Q_a \tanh\left(\frac{T - T_0}{T_n}\right),$$

der $Q_0 - Q_a$ representerer *istider* og $Q_0 + Q_a$ *mellomistider.*

(b) Gi en kvalitativ diskusjon av den modifiserte modellen, og forklar spesielt hva som kan inntreffe hvis

$$T_n < \frac{Q_a}{4Q_0} T_0.$$