

75048 Matematisk modellering, 10. januar 2000
LØSNING MED KOMMENTARER

Oppgave 1

(a) Under stasjonære forhold, og med bare varmestrøm i radiell retning vil ligningen for temperaturen i isolasjonen være

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

med generell løsning $T(r) = C_1 + C_2 \ln r$. Med $T(r_1) = T_1$ og $T(r_2) = T_2$ blir løsningen

$$T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Det totale varmetapet pr. tidsenhet på en rørlengde L blir

$$J = -k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_1} \times 2\pi r_1 L = -k \frac{T_2 - T_1}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r_1} 2\pi r_1 L,$$

og følgelig blir tapet pr. lengdeenhet

$$\frac{J}{L} = k \frac{2\pi}{\ln(r_2/r_1)} (T_1 - T_2),$$

og $\alpha = 2\pi k / \ln(r_2/r_1)$.

(b) *Varmeinnholdet* i oljen er gitt av $\rho c T(z, t)$, mens *fluksen* i z -retning er

$$j(z, t) = -k_o \frac{\partial T}{\partial z} + V \rho c T,$$

der k_o er ledningsevnen i oljen, og det siste leddet representerer varmetransport på grunn av oljens egen bevegelse. Bevarelsesloven på integralform gir oss nå mellom $z = a$ og $z = b$

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho c T (\pi r_1^2 dz) + \pi r_1^2 \left[-k_o \frac{\partial T}{\partial z} + V \rho c T \right]_a^b = - \int_a^b 2\pi r_1 \alpha T dz,$$

med andre ord,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k_o}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - V \frac{\partial T}{\partial z} - \left(\frac{2\alpha}{\rho c r_1} \right) T.$$

Ved stasjonære forhold ($\partial T / \partial t = 0$) når vi også ser bort fra varmediffusjon i oljen langs røret, blir $dT/dz + T/z_o = 0$, der $z_o = V \rho c r_1 / (2\alpha)$. Løsningen for problemet i oppgaven blir dermed $T(z) = T_0 \exp(-z/z_o)$, og *lengdeskalaen* z_o .

Oppgave 2

(a) Hvis vi betrakter en horisontal skive med areal A rundt fryseflaten, vil det i denne i løpet av tiden Δt bli generert en varmemengde $Q = (A\Delta s)\rho L = (A\dot{s}\Delta t)\rho L$. Siden det er neglisjerbare temperaturvariasjoner i dette volumet ($T \approx 0$) og samme spesifikke varme for is og vann, gir varmebevarelsen

$$-k \frac{\partial T}{\partial z}(s+)A - \left(-k \frac{\partial T}{\partial z}(s-) \right) A = Q/\Delta t,$$

som er oppgitt formel.

(b) Siden $T_w = 0$, vil fluksen mellom vann og is være 0. Videre vil, siden α_{il} er det er oppgitt var meget stor, $T(0+) = T_l$ (Dette er et lite argument som også ble berørt under seminaret. Vi har generelt at $-k \frac{\partial T}{\partial z}(0+) = -\alpha_{il}(T(0+) - T_l)$, og når α_{il} er meget stor, må $T(0+) \approx T_l$, slik at vi kan forsvare å bruke likhet). Dette gir oss

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (2)$$

$$T(0) = T_l, \quad (3)$$

$$T(s(t)) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(s(t)-) = \frac{\rho L}{k} \frac{ds}{dt}. \quad (5)$$

I problemet har vi altså parametrene T_l , $\kappa = k/\rho c$ og $\lambda = \rho L/k$ som oppgitt, og ellers *ingen lengde eller tidsskalaer*. Løsningen må være på formen

$$T(z, t) = T_l f(x, t, T_l, \kappa, \lambda),$$

og siden f må være en funksjon av dimensjonsløse kombinasjoner, benytter vi Buckingham's Π -teorem til å konkludere med at vi har 5 størrelser og 3 uavhengige dimensjoner, det vil si 2 kombinasjoner, for eksempel,

$$\eta = \frac{z}{\sqrt{\kappa t}},$$

$$\pi_2 = \frac{\kappa \lambda}{T_l}.$$

Altså gir dimensjonsanalysen at $T(z, t) = T_l f(z/\sqrt{\kappa t}, \pi_2)$. Hvis en ikke liker at $\pi_2 < 0$, kunne en bruke $\pi_2 = \kappa \lambda / |T_l|$. På samme måten må vi kunne skrive at $s = g(t, T_l, \kappa, \lambda)$, og samme type argument gir oss da kombinasjonene $\pi_1 = s/\sqrt{\kappa t}$ og π_2 , som før. Dette betyr en relasjon på formen $\Phi(\frac{s}{\sqrt{\kappa t}}, \pi_2) = 0$, eller $s = A(\pi_2)\sqrt{\kappa t}$.

(d) Hvis vi fører $T(z, t) = T_l f(z/\sqrt{\kappa t}, \pi_2)$ inn i varmeledning ligningen, får vi ved å derivere ut

$$0 = T_t - \kappa T_{zz}$$

$$= T_l f' \frac{z}{\sqrt{\kappa}} t^{-3/2} \left(-\frac{1}{2}\right) - T_l f'' \frac{1}{\kappa t},$$

som gir oppgitt ligning. Forøvrig gir randbetingelsene i lign. (2), der grenseflaten mellom is og vann er gitt av $\eta = A$,

$$f(0) = 1,$$

$$f(A) = 0,$$

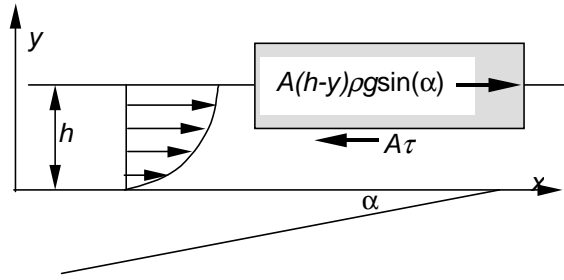


Figure 1: Væsken på skråplanet.

mens fluksbetingelsen $\frac{\partial T}{\partial z}(s(t)) = \frac{\rho L}{k} \frac{ds}{dt}$ må regnes ut:

$$T_l f'(A) \frac{1}{\sqrt{\kappa t}} = \lambda \frac{1}{2} t^{-1/2} \sqrt{\kappa},$$

dvs.,

$$f'(A) = \frac{\pi_2}{2}. \quad (6)$$

Som forventet kan altså hele løsningen uttrykkes i η og de andre parametrene. Fra den generelle oppgitte løsningen får vi derfor

$$\begin{aligned} T(z, t) &= T_l f\left(\frac{z}{\sqrt{\kappa t}}, \pi_2\right) \\ &= T_l \left(1 - \frac{\operatorname{erf}(z/\sqrt{4\kappa t})}{\operatorname{erf}(A/2)}\right). \end{aligned}$$

Vi kjenner ikke A , men kan finne denne ved å løse lign. (6), som gir oss $A = A(\pi_2)$.

Det var ikke tenkt at en skulle gå lenger enn dette, men det er ellers enkelt å se at

$$f'(A) = -\frac{1}{\operatorname{erf}(A/2)} \cdot \frac{2e^{-A^2/4}}{\sqrt{\pi}} = \frac{\pi_2}{2}$$

har en løsning (husk at også $\pi_2 < 0$). Litt mer analyse viser at $f'(A)$ er monotont voksende, slik at løsningen er entydig.

Oppgave 3

(a) For beskrivelse av *ekspansjonsbølge*, *kontakt-diskontinuitet* og *sjokk*, og løsningene i disse tre situasjonene, viser vi til pensum.

(b) Fig. (1) illustrerer situasjonen, lett fordreid (!). Væsken i kontrollvolumet ville akselerert på grunn av tyngdekraften hvis det ikke hadde vært for skjærkraften på bunnen i kontrollvolumet. Kreftene på sidekantene kanselerer ut.

Dermed blir

$$\tau = (h - y)\rho g \sin \alpha,$$

eller

$$\frac{du}{dy} = \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} (h - y).$$

Vi får at $u(y) = \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} y(h - y/2)$, siden $u(0) = 0$. Total volumstrøm pr. breddeenhed blir dermed:

$$Q(h) = \int_0^h u(y) dy = \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \left[h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^h = \frac{\rho g \sin \alpha}{3\mu} h^3. \quad (7)$$

(c) Bevarelsesloven på integralform er

$$\frac{d}{dt} \int_a^b h(x, t) dx + Q(h(b)) - Q(h(a)) = 0,$$

som leder til

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial Q}{\partial x^*} = \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{h^{*3}}{3} \right) = 0,$$

der vi temporært har skrevet h^* , x^* og t^* for variable med enheter. Ved å føre inn skalaer, $h^* = Hh$, $x^* = xX$ og $t^* = Tt$, får vi

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{TH^2}{X} \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{3} \right) = 0. \quad (8)$$

Ligningen får oppgitt form ved å sette

$$T = \left(\frac{H^2}{X} \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \right)^{-1}.$$

(d) Vi skal løse lign. 8 i første kvadrant når

$$h(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{for } x > 0, t = 0, \\ \sqrt{t} & \text{for } x = 0, t \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Kinematisk hastighet $c(h) = \frac{dQ}{dh} = h^2$ er større eller lik null, og karakteristikken som starter i (x_0, t_0) er som kjent gitt ved

$$x = x_0 + c(h(x_0, t_0))(t - t_0).$$

Karakteristikkene som starter på x -aksen er alle vertikale, mens karakteristikene fra t -aksen blir mer og mer horisontale etterhvert som t_0 øker. For en karakteristikk fra punktet $(0, t_0)$ på t -aksen blir

$$x = c(h = \sqrt{t_0})(t - t_0) = t_0(t - t_0),$$

som gir $t_0^2 - tt_0 + x = 0$, dvs. $t_0 = \frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{t^2}{4} - x}$. I området $x < t^2/4$ har vi med andre ord kryssende karakteristikker i hvert eneste punkt.

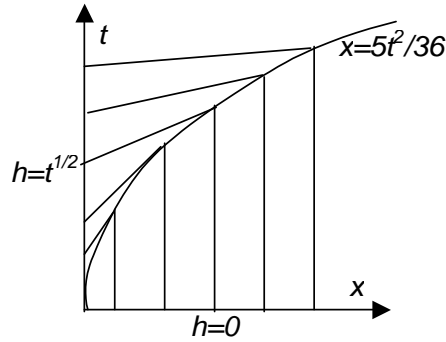


Figure 2: Skisse av karakteristikkene og sjokket.

(e) På grunn av tvetydigheten nevnt ovenfor, er det i oppgaven oppgitt hvilke karakterstikker det er som møtes i sjokket, $s(t)$. Foran sjokket er det karakteristikker fra x -aksen, og etter sjokket karakteristikker fra t -aksen. Vi setter opp ligningen for sjokkhastigheten:

$$U(s, t) = \frac{Q(h_2) - Q(h_1)}{h_2 - h_1} = \frac{Q(h_1)}{h_1} = \frac{h_1^2}{3} = \frac{t_0}{3} = \frac{1}{6} \left(t + \sqrt{t^2 - 4s} \right).$$

Differensialligningen for sjokket blir følgelig

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{6} \left(t + \sqrt{t^2 - 4s} \right),$$

og vi verifiserer lett at den oppgitte løsningen $s(t) = 5t^2/36$ passer. Dermed blir løsningen (for $0 \leq x, t$)

$$h(x, t) = \begin{cases} 0, & 5t^2/36 < x, \\ \left(\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} - x} \right)^{1/2}, & x < 5t^2/36. \end{cases}$$

Da denne oppgaven ble gitt i 1990, skulle studentene også finne ut hva som skjedde med karakteristikken som startet i $t_0 = \frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} - x}$.

Oppgave 4

(a) Det totale varmeinnholdet i massen er McT . Ligningen er satt opp pr. arealenhet, og det er derfor dividert med $4\pi R^2$. Venstresiden angir endring i varmeinnhold pr. kvadratmeter og sekund, og høyresiden angir tilførsel, Q_0 , og tap, σT^4 . Likevektstemperaturen T_0 er gitt ved $Q_0 - \sigma T_0^4 = 0$, dvs. $T_0 = 260\text{K}$. Ved å sette $T = T_0 + \tau$ får vi til første orden

$$\frac{Mc}{4\pi R^2} \frac{d\tau}{dt} = -4\sigma T_0^3 \tau,$$

som også kan uttrykkes

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{t_0} &= 0, \\ t_0 &= \frac{Mc/(4\pi R^2 \sigma)}{4T_0^3}. \end{aligned} \tag{10}$$

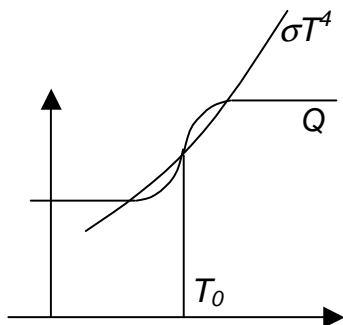


Figure 3: Figuren illustrerer likevektsløsningene når $T_n < \frac{Q_a}{4Q_0}T_0$. Bare løsningene på endene er stabile.

Med oppgitte verdier blir $t_0 \approx 71$ døgn. Siden alle løsningene av lign. 10 er på formen $C \exp(-t/t_0)$, kan vi slutte at T_0 er stabil overfor forstyrrelser, og at tiden det tar for slike å dø ut er tre til fem ganger t_0 , med andre ord, omlag et år. At likevektstemperaturen er stabil, følger naturligvis også fra det generelle kriteriet for ligninger på formen $\dot{T} = f(T)$, nemlig $df/dT|_{T=T_0} < 0$.

(b) Modellen blir nå

$$\frac{Mc}{4\pi R^2} \frac{dT}{dt} = Q_0 + Q_a \tanh\left(\frac{T - T_0}{T_n}\right) - \sigma \varepsilon T^4 = f(T),$$

og stabilitet avgjøres av hvorvidt $f'(T_s)$ er større eller mindre enn 0. Hvis vi for enkelhets skyld setter $\varepsilon = 1$ og sier at T_0 er likevektstemperaturen fra (a), blir

$$f'(T_0) = \frac{Q_a}{T_n} - 4\sigma T_0^3 = \frac{Q_a}{T_n} - \frac{4}{T_0}Q_0 = \frac{Q_a}{T_n} \left(1 - \frac{4Q_0 T_n}{T_0 Q_a}\right).$$

Hvis $T_n < \frac{Q_a}{4Q_0}T_0$ blir følgelig $f'(T_0) > 0$ og ikke T_0 lenger stabil. Situasjonen er illustrert på fig. 3.

Det som sannsynligvis styrer de store klimaendringene på jorda er variasjoner i innstrålingen Q_0 . Dette flytter $Q_0 + Q_a \tanh\left(\frac{T-T_0}{T_n}\right)$ opp og ned. Hvis $T_n < \frac{Q_a}{4Q_0}T_0$, er det dermed ikke overraskende at overgangen mellom istider og mellomistider synes å skje temmelig abrupt. En kan også tenke seg at $\sigma \varepsilon T^4$ flytter seg ved at ε varierer, eller at det er sammenheng mellom ε og første ledd.

Videre funderinger over denne modellen, som ble introdusert så sent (?) som i 1987 av Ghil og Childres, overlates til leserne.