Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald E. Krogstad
Telefon: 73 59 35 36

EKSAMEN I FAG 75048/SIF5036 MATEMATISK MODELLERING

Bokmål
Torsdag 30. november 2000
Kl. 09-15

Hjelpemidler: B1, Typegodkjent kalkulator med tomt minne
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt

Oppgave 1

Ei uregelmessig havoverflate kan oppfattes som en sum av regulære bølger, $z = a\cos(\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{x} - \omega t)$. Variansen til overflatehevningen i et fast punkt $\mathbf{x}_0$ på havoverflata kan skrives som et integral over en *variansteth et*, $\Psi(\omega,\theta)$,

$$\operatorname{Var} Z = \int_{\omega=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi}\Psi(\omega,\theta)d\theta d\omega,$$

der $\mathbf{k} = k(\omega)(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j})$ og enheten til $\operatorname{Var} Z$ er m^2. Her er k bølgetall, $k = 2\pi/\lambda$, θ bølgeretning og ω vinkelfrekvens. Vi kan alternativt skrive

$$\Psi(\omega,\theta) = D(\theta-\theta_w,\omega,\cdots)S(\omega,\cdots),$$

der $\int_{\theta=0}^{2\pi} D(\theta,\omega,\cdots)d\theta \equiv 1$, θ_w er vindretningen, og "$\cdots$" betegner andre parametre. O. Phillips postulerte i 1958 at $\Psi(\omega,\theta)$ vil begrenses av bølgebrytning slik at

$$\Psi(\omega,\theta) \le \Psi_{\max}(\omega,\theta),$$

og videre at vannets viskositet og lufta ikke spiller noen sentral rolle i funksjonen $\Psi_{\max}$. På dypt vann er det derfor *kun* tyngdens akselerasjon, g, og vannets tetthet, ρ, som kan komme inn som "andre parametre".

(a) For vannbølger gjelder en sammenheng som på dypt vann i utgangspunktet kan skrives

$$k = f(\omega, g, \rho).$$

Bruk dimensjonsanalyse til å bestemme formen på denne sammenhengen.

(b) Vis ved hjelp av dimensjonsanalyse at Phillips sine postulater leder til

$$\Psi_{\max}(\omega, \theta) = D(\theta)\frac{\alpha g^2}{\omega^5},$$

der α er en konstant og vi har latt $\theta_w = 0$.

Oppgave 2
Utslipp i ei elv vil fraktes med strømmen (konveksjon) og spres på grunn av turbulens og variende vannhastighet ("diffusjon"). For den en-dimensjonale elva vi ser på, er middelstrømmen U og diffusjonskoeffisienten κ.

(a) Angi uttrykket for fluksen av forurensninger under disse forutsetningene, og sett opp et uttrykk for lengdeskalaen til utstrekningen av et instantant, punktformet utslipp etter at det har blitt fraktet lengden L nedover elva med middelstrømmen.

I punktet $x = 0$ foregår det et kontinuerlig utslipp av et stoff A slik at konsentrasjonen i elva blir $a(x, t)$. Stoffet A omdannes til stoffet B med konstant rate μ. I en gitt mengde vann tatt fra elva ville vi fått

$$\frac{da}{dt} = -\mu a.$$

Stoffet B brytes i sin tur også ned på samme måte med rate λ.

(b) Sett opp bevarelseslovene for A og B på integral- og differensialform.

(c) Utslippet i $x = 0$ foregår med konstant utslippsrate q_0. Se bort fra diffusjon og bestem hvor langt nede i elva konsentrasjonen av stoffet B er på sitt høyeste når vi antar at $\lambda = \mu$.

(Vink: Differensialligningen $\frac{dy}{dt} + ky = e^{-kt}$ har løsningen $y(t) = C_1 e^{-kt} + te^{-kt}$).

Oppgave 3

Langs en uendelig lang vei på x-aksen kjører en rekke identiske biler av lengde L og med posisjoner $\{x_n^*\}$,

$$\cdots < x_3^* < x_2^* < x_1^*.$$

Akselerasjonen til bil nr. n er bestemt av hastighetsforskjellen til bilen foran,

$$\frac{d^2 x_n^*(t^* + T)}{dt^{*2}} = -\lambda \left(\frac{dx_n^*(t^*)}{dt^*} - \frac{dx_{n-1}^*(t^*)}{dt^*} \right),$$

og videre er λ gitt som

$$\lambda = \frac{a}{(x_{n-1}^* - x_n^*)^2},$$

der a er en konstant.

(a) Forklar kort hva denne modellen prøver å beskrive.

(b) Vis at ved å føre inn passende skalaer for x^* og t^*, og etter én gangs integrasjon i t^*, kan vi skrive modellen på formen

$$\dot{x}_n(t+\tau) = \left(1 - \frac{1}{x_{n-1} - x_n}\right), \; x_n + 1 \le x_{n-1}.$$

Angi løsningen når alle bilene kjører med konstant avstand d, og vis at modellen leder til en lineær sammenheng mellom bilhastighet (v) og biltetthet (ρ), $v = 1 - \rho$.

(c) Bilene i punkt (b) kjører med konstant avstand $d = 2$ når første bil begynner å variere farten slik at $x_1(t) = t/2 + y_1(t)$. Dette influerer på kjøringen bakover i køen slik at avviket for bil nr. n er y_n. Vis at så lenge avvikene er små i forhold til 1, vil vi få følgende lineariserte ligning for bil nr. n:

$$\frac{dy_n(t+\tau)}{dt} + \frac{1}{4} y_n(t) = \frac{1}{4} y_{n-1}(t).$$

Anta at $y_{n-1}(t) = Ae^{i\omega t}$ ($\omega > 0$) og at bil nr. n har kommet inn i en tilsvarende svingning, $y_n(t) = Be^{i\omega t}$. Vis at amplituden $|B| > |A|$ hvis

$$\cos(\omega\tau) < -2\omega.$$

(d) Angi kontinuumsmodellen som sammenhengen mellom v og ρ i (b) leder til. For å sjekke modellen, tenker vi oss at vi sitter i en bil et stykke bak i køen foran et lyskryss på rødt. Lyset skifter til grønt, og akkurat når vi passerer lyskrysset, observerer vi både avstanden til foranliggende bil og vår egen hastighet. Hva kan vi trekke ut av denne informasjonen?

(e) Vis at modellen i (d) gir at sjokkhastigheten er gjennomsnittet av de kinematiske hastighetene på begge sider av sjokket. Skissér, uten å regne i detalj, løsningen for $t \geq 0$ av følgende situasjon: Bak trafikklyset ($x < 0$) i origo står det en uendelig bilkø, og foran krysset ($x > 0$) er det ingen biler. Lyset skifter til grønt ved $t = 0$. Ved $x = 1$ er det et nytt trafikklys som skifter fra grønt for $t < 2$ til rødt for $t > 2$.

Oppgave 4
(a) Forklar hva som menes med stabile og ustabile likevektspunkter for en populasjonsmodell på formen

$$\frac{dP}{dt} = f(P).$$

Drøft følgende modell for en fiskepopulasjon P der det fanges et fast kvantum h pr. tidsenhet:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{P_0}\right)\left(\frac{P}{P_c} - 1\right) - h,\ 0 < P_c < P_0$$

(Vink: Skissér argumentene grafisk uten å regne).

Vi modellerer Norges (uendelig lange) kyst som y-aksen og Norskehavet som området $x > 0$. Fiskerigrensen er $x = l$, og utenfor fiskerigrensen ligger det tett med rov-fiskere som tar all fisk som kommer utenfor grensen. Fiskearten vi ser på, produseres uniformt i hele området, og den er ikke en stimfisk. Innenfor fiskerigrensen er det ikke noe fiske.

(b) Angi på stikkords form hva følgende modell forsøker å beskrive:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + rP(1 - P), \\
\kappa, r &> 0, \\
P(l, t) &= 0, \\
\frac{\partial P}{\partial x}(0, t) &= 0.
\end{aligned}$$

(c) Vi ønsker å se hva som skjer med *små* populasjoner, og gjør dette ved å drøfte løsninger av den *lineariserte* modellen i (b). Diskutér dette ved å studere løsninger på formen

$$P_n(x, t) = e^{\lambda_n t} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right),\ n = 0, 1, \cdots$$

for passende verdier av λ_n. (Løsningene er egenfunksjoner til det lineariserte problemet).