SIF 5036 Matematisk modellering

Eksamen 30. november 2000

Løsningsskisse med utfyllende kommentarer

1 Oppgave

(a) Av de aktuelle variablene k, ω, g og ρ er det bare ρ som har "kg" i benevningen. Derfor kan ikke ρ være med. Vi står igjen med 3 variable med 2 uavhengige dimensjoner, lengde og tid. Vi får én dimensjonsløs variabel, for eksempel

$$\pi_1 = \frac{kg}{\omega^2},$$

dvs. $k = C\omega^2/g$ (Ved å løse problemet analytisk, finner en $C = 1$).

(b) For den dimensjonsløse funksjonen $D_{\max}$ har vi i utgangspunktet

$$D_{\max}(\theta, \omega, g, \rho).$$

Siden vi ikke kan kombinere ω, g og ρ til noen dimensjonsløs kombinasjon, kan ingen av dem være med. Funksjonen $D_{\max}$ må derfor ha en universell fast form (rimeligvis symmetrisk om vindretningen). Formen ser pr. dato ellers ut til å være ukjent.

Ved å se på uttrykkene i oppgaveteksten, finner vi at $[S] = \mathrm{m}^2\mathrm{s}$. I samlingen S, ω, g og ρ må vi også her kaste ut ρ. På samme måte som (a) finner vi lett

$$\pi_1 = \frac{S_{\max}\omega^5}{g^2},$$

eller

$$S_{\max}(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5}.$$

Konstanten α kalles *Phillipskonstanten*.

Et vel så elegant argument er å gå ut fra $\Psi_{\max} = \Psi_{\max}(\omega, g, \theta)$, og fra dimensjonsanalysen finne

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{\Psi_{\max}\omega^5}{g^2},\\ \pi_2 &= \theta,\end{aligned}$$

og dermed $\pi_1 = D_{\max}(\pi_2)$, eller $\Psi_{\max} = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} D_{\max}(\theta)$.

I oppgaven kan en undre seg om *radian* skal være en enhet, men vinkel målt i radianer er et forhold mellom to lengder (buelengden og radien).

2 Oppgave

(a) Fluks:

$$J = J_{\text{conv.}} + J_{\text{diff.}} = cU - \kappa\frac{\partial c}{\partial x}.$$

Lengdeskalaen L_d for diffusjon finnes ved å å observere at en i fundamentalløsningen opererer med en *similaritetsvariabel*,

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{\kappa t}}.$$

Utstrekningen vil bli $\eta = \mathcal{O}(1)$. Etter et tidsrom $T_d = L/U$ kan vi for et overslag sette

$$\frac{\kappa T_d}{L_d^2} = 1,$$

eller

$$L_d = \sqrt{\kappa T_d} = \sqrt{\kappa L/U}.$$

(b) Bevarelsesloven for A på integralform blir

$$\frac{d}{dt}\int_\alpha^\beta a(x,t)dx + J_a(\beta) - J_a(\alpha) = \int_\alpha^\beta (q_a(x,t) - \mu a(x,t))\, dx,$$

der $q_a(x,t)$ er utslippskilden, som ifølge oppgaveteksten har formen $q_a(x,t) = q_0\delta(x)$. Sluket $-\mu a$ står for nedbrytingen av A. På differensialform blir dette

$$\frac{\partial a}{\partial t} + U\frac{\partial a}{\partial x} - \kappa\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = q_0\delta(x) - \mu a.$$

Uttrykkene for B blir tilsvarende:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\alpha^\beta b(x,t)dx + J_b(\beta) - J_b(\alpha) &= \int_\alpha^\beta (\mu a(x,t) - \lambda b(x,t))\, dx, \\
\frac{\partial b}{\partial t} + U\frac{\partial b}{\partial x} - \kappa\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} &= \mu a - \lambda b.
\end{aligned}$$

(c) Når vi tar bort diffusjonsleddene, blir ligningene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial t} + U\frac{\partial a}{\partial x} &= q_0\delta(x) - \mu a, \\
\frac{\partial b}{\partial t} + U\frac{\partial b}{\partial x} &= \mu a - \lambda b.
\end{aligned}$$

Siden det ikke er noe diffusjon, kan vi løse ligningene ved å følge karakteristikkene ($x = x_0 + Ut$). *Dette blir egentlig det samme som å følge et fast vannvolum på vei nedover elva.* For dette vannvolumet blir ligningene

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\mu a, \;\; a(0) = a_0, \\
\frac{db}{dt} &= \mu a - \mu b, \;\; b(0) = 0.
\end{aligned}$$

Vi legger ellers merke til at konsentrasjonen a_0 bestemmes fra ligningen

$$q_0\Delta t = a_0(U\Delta t),$$

dvs., $a_0 = q_0/U$. Løsningen for $a(t)$ finnes umiddelbart som

$$a(t) = a_0 e^{-\mu t},$$

og dette leder i sin tur til ligningen

$$\frac{db}{dt} + \mu b = \mu a_0 e^{-\mu t}$$

med oppgitt generell løsning

$$b(t) = C_1 e^{-\mu t} + \mu a_0 t e^{-\mu t}.$$

Siden $b(0) = 0$, blir løsningen $b(t) = \mu a_0 t e^{-\mu t}$, med et maksimum for $t = \mu^{-1}$. Konsentrasjonen av B er altså på sitt største U/μ nedenfor utslippsstedet.

Merk: Dette punktet kan alternativt løses ved å observere at konsentrasjonene må være uavhengige av tiden. Ved å anta det, kan vi skrive

$$\begin{aligned} U\frac{da}{dx} &= -\mu a, \\ U\frac{db}{dx} &= \mu a - \lambda b. \end{aligned}$$

Løsningen blir tilsvarende.

3 Oppgave

(a) Dette er i hovedsak beskrevet i notatet fra seminaret. Modellen beskriver akselerasjonsendringen til bil nr. n som funksjon av hastighetsforskjellen til bilen foran. Bilistens reaksjon er forsinket med tiden T i forhold til observasjonen av relativhastigheten. Reaksjonsstyrken λ avhenger av avstanden til bilen foran.

(b) Ved å skrive modellen som

$$\frac{d^2 x_n^*(t^* + T)}{dt^{*2}} = \frac{a}{(x_{n-1}^* - x_n^*)^2}\left(\frac{dx_{n-1}^*(t^*)}{dt^*} - \frac{dx_n^*(t^*)}{dt^*}\right),$$

ser vi at den kan integreres én gang:

$$\begin{aligned} \frac{dx_n^*(t^* + T)}{dt^*} &= a\int \frac{\frac{dx_{n-1}^*(t^*)}{dt^*} - \frac{dx_n^*(t^*)}{dt^*}}{(x_{n-1}^* - x_n^*)^2} dt^* \\ &= a\int \frac{d\left(x_{n-1}^* - x_n^*\right)}{(x_{n-1}^* - x_n^*)^2} \\ &= C - \frac{a}{(x_{n-1}^* - x_n^*)}. \end{aligned}$$

Vi lar $x^* = Lx$. Konstanten C er det naturlig å velge slik at hastigheten på bilene er 0 når $x_{n-1}^* - x_n^* = L$, dvs. $C = a/L$. Konstanten C blir også et uttrykk for den maksimale hastigheten. Alle konstantene kansellerer hvis vi setter tidsskalaen $\Upsilon = L^2/a$, og vi får oppgitt ligning.

Hvis avstanden mellom bilene er d, vil bilhastigheten være $(1 - 1/d)$, og løsningen blir

$$x_n = x_0 - nd + (1 - 1/d)t,\ n = 1, 2, \cdots$$

Antall biler pr. lengdeenhet i denne situasjonen blir nettopp

$$\rho = \frac{1}{x_{n-1} - x_n} = \frac{1}{d},$$

og følgelig er $v = 1 - \rho$.

(c) Vi antar nå at

$$x_n(t) = t/2 - 2n + y_n(t)$$

og fører dette inn i bevegelsesligningen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{dy_n(t+\tau)}{dt} &= 1 - \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \\
&= 1 - \frac{1}{2 + y_{n-1} - y_n} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{y_{n-1} - y_n}{2} + O(y_i^2 \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (y_{n-1} - y_n) + O(y_i^2).
\end{aligned}$$

Dermed får vi oppgitt ligning til ledende orden.

Vi setter inn en periodisk svingning og regner på kompleks form siden vi har lineære ligninger:

$$B\omega i e^{i\omega\tau} + \frac{B}{4} = \frac{1}{4} A.$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
|\frac{B}{A}| &= \frac{1}{|4\omega i e^{i\omega\tau} + 1|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(-4\omega \sin(\omega\tau) + 1)^2 + (4\omega \cos \omega\tau)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{16\omega^2 - 8\omega \sin \omega\tau + 1}}.
\end{aligned}$$

Forholdet blir større enn 1 hvis

$$-8\omega \sin \omega\tau + 1 + 16\omega^2 < 1$$

dvs.

$$-\sin \omega\tau + 2\omega < 0.$$

Det var altså en feil i det oppgitte svaret i oppgaven på eksamen. Denne betingelsen kan alternativt skrives

$$\frac{\sin \omega\tau}{\omega\tau} > \frac{2}{\tau}$$

Hvis $2/\tau < 1$, finner det skumle lave frekvenser siden $\sin x/x \to 1$ når $x \to 0$.

(d) Modellen er $v = 1 - \rho$, $J = \rho(1 - \rho)$ og

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (1 - 2\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Når vi passerer lyskrysset, befinner vi oss på karakteristikken som starter i origo og har 0 kinematisk hastighet. Dermed bør avstanden til bilen foran tilsvare $\rho = 1/2$. Da er middelavstanden 2 billengder, eller den fri avstanden mellom hver bil *én* billengde. Hastigheten vår skal tilsvare $v = 1 - 1/2 = 1/2$, dvs. halvparten av $v_{\max}$.

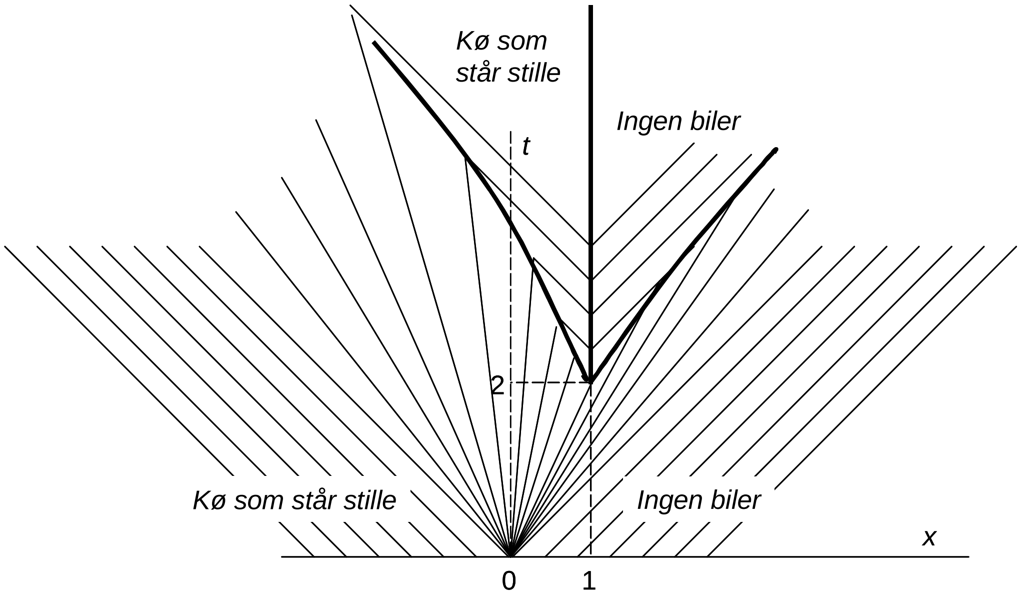

Figure 1: Karakteristikker for problemet skissert i (e). Fram til $t = 2$ har vi en ren ekspansjonsbølge fra origo. Rundt lyskrysset i $x = 1$ utvikler det seg en full og en tom sone etter $t = 2$. Sjokkene på hver side av $x = 1$ er konkave siden de kinematiske hastighetene på oversiden er konstante, mens vi på undersiden har karakteristikker med hastigheter som går mot henholdsvis $+1$ og -1 når $t \to \infty$.

(e) Vi viser påstanden ved å regne ut

$$\begin{aligned} U &= \frac{J_2 - J_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\rho_2(1-\rho_2) - \rho_1(1-\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1} = 1 - \rho_1 - \rho_2, \\ \frac{c(\rho_2) + c(\rho_2)}{2} &= \frac{1 - 2\rho_2 + 1 - 2\rho_1}{2} = 1 - \rho_1 - \rho_2. \end{aligned}$$

(Dette er ikke noe som gjelder generelt). Vi ser at karakteristikkene må *forsvinne inn i sjokket*.

Karakteristikkene for problemet er skissert på figur 1. All informasjon om løsningen leses ut fra stigningen på karakteristikkene på grunn av sammenhengen $c = 1 - 2\rho$. Ved å bruke middelhastighetsegenskapen vi kom fram til ovenfor, ser vi at begge de bevegelige sjokkene på figuren krummer nedover: For karakteristikkene på oversiden er de kinematiske hastighetene henholdsvis $+1$ og -1, mens de på undersiden går (monotont) mot $+1$ og -1 når $t \to \infty$.

4 Oppgave

(a) Likevektspunktene for modellen

$$\frac{dP}{dt} = f(P)$$

er løsningene av $f(P) = 0$. Ved å rekkeutvikle omkring et likevektspunkt P^* finner vi

$$\frac{d}{dt}(P^* + p) = f(P^*) + f'(P^*)p + \mathcal{O}(p^2),$$

dvs.

$$\frac{dp}{dt} = f'(P^*)p + \mathcal{O}(p^2).$$

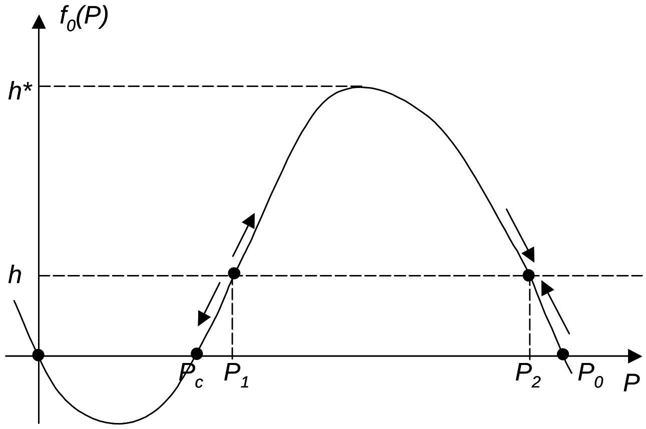

Figure 2: For en gitt fangst $h > 0$ finnes det to likevektspunkter P_1 og P_2. Hvis popolasjonen havner mellom 0 og P_1, vil den dø ut. Er $P > P_1$, vil populasjonen gå mot det stabile likevektspunktet P_2. Hvis $h > h^*$, er fangsten så stor at bestanden med sikkerhet dør ut.

Normalt (*Logan*, Thm. 2.1, s. 361) vil P^* være stabilt hvis $f'(P^*) < 0$ og ustabilt hvis $f'(P^*) > 0$. Situasjonen her kan enkelt skisseres grafisk ved å sette

$$rP\left(1-\frac{P}{P_0}\right)\left(\frac{P}{P_c}-1\right)-h = f_0(P)-h,$$

og tegne tredjegradspolynomet $f_0(P)$ sammen med h som i fig. 2. Uten fangst er $P = 0$ og $P = P_0$ stabile, mens P_c er ustabilt. Med fangst vil vi få to likevektspunkter såfremt $h < h^* = \max_P f_0(P)$.

Neste problemstilling ble hentet fra *Mathematical Models and Their Analysis* (F.Y.M. Wan, Harper and Row, New York, 1989). I boka fins en mye mer inngående analyse om innføringen av 200 miles fiskerigrense på USAs østkyst. Muligens er "diffusjon" mer relevant for krabbe og hummer enn for fisk (?).

(b) Oppgitt modell:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} &= \kappa\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + rP(1-P), \\
\kappa, r &> 0, \\
P(l,t) &= 0, \\
\frac{\partial P}{\partial x}(0,t) &= 0,
\end{aligned}$$

som i stikk-ords form beskriver:

- En *populasjonstetthet* P (antall pr. flateenhet) normert slik at $P = 1$ svarer til en uniform stabil likevekt.
- Ingen variasjon i y-retningen.
- Logistisk modell for vekst
- "Diffusjon" sørger for å spre fisken og glatte ut konsentrasjonsgradienter
- All fisk som kommer utenom fiskerigrensen fiskes opp
- Ingen fluks av fisk imot eller fra land (!)

Linearisering av ligningen i (b) betyr ikke annet enn at $P << 1$, slik at vi får

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + rP,$$

med randkravene

$$\begin{aligned} P(l,t) &= 0, \\ \frac{\partial P}{\partial x}(0,t) &= 0. \end{aligned}$$

Homogene randkrav og separasjon av variable leder på vanlig måte til et egenverdiproblem. I oppgaven var resultatet oppgitt slik at det bare gjenstår å bestemme egenverdiene (Merk for eksempel at alle egenfunksjonene P_n tilfredsstiller randkravene). Innsatt i ligningen får vi

$$\lambda_n = \left[-\kappa \left(\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right)^2 + r \right], \; n = 0, 1, \cdots .$$

Hvis

$$r < \kappa \left(\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right)^2$$

for alle n, vil λ_n være negativ, og følgelig vil alle funksjoner på formen

$$P(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_n(x,t)$$

dø ut når $t \to \infty$. Slike populasjoner dør altså ut, og $P(x,t) = 0$ er et stabilt likevektspunkt.

Hvis derimot

$$r > \kappa \left(\frac{\pi x}{2l} \right)^2$$

vil noen av egenfunksjonene kunne vokse. Null-løsningen blir ustabil, og populasjonen vokser opp til en *stasjonær tilstand* $P(x,t) = P_\infty(x)$.

Det kan enkelt vises at P_∞ tilfredsstiller ligningene

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{\kappa}{r}} \int_{P_\infty}^{P_\infty(0)} \frac{dp}{\sqrt{(P_\infty(0)^2 - p^2) - \frac{2}{3}\left(P_\infty(0)^3 - p^3\right)}}, \\ l &= \sqrt{\frac{\kappa}{r}} \int_{0}^{P_\infty(0)} \frac{dp}{\sqrt{(P_\infty(0)^2 - p^2) - \frac{2}{3}\left(P_\infty(0)^3 - p^3\right)}}, \end{aligned}$$

der $P_\infty(0)$ først må bestemmes fra den nederste ligningen. Integralene lar seg ikke uttrykke ved hjelp av elementære funksjoner, se forøvrig Wan, s. 254 ff.

Den lineariserte diff.ligningen ovenfor ble også gitt til kontinuasjonseksamen i august 2000.