**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen:
Harald E. Krogstad, tlf: 9 35 36/ mobil:416 51 817

# Eksamen i SIF5036 Matematisk modellering

Onsdag 12. desember 2001
Kl. 0900-1500

Sensur: uke 1, 2002

Tillatte hjelpemidler:
Rottmann: Matematisk formelsamling,
Enkel kalkulator

## Oppgave 1

(a) Antallet individer i en populasjon, $N^*$, modelleres ofte med en såkalt *logistisk modell*,

$$\frac{1}{N^*(t^*)}\frac{dN^*(t^*)}{dt^*} = r\left(1 - \frac{N^*(t^*)}{N_m}\right),\ 0 < r,\ 0 < N_m. \tag{1}$$

Skalér ligningen og vis hvordan en undersøker stabiliteten til likevektspunktene.

I laboratoriestudier av lukkede bakteriekulturer har det vist seg vanskelig å finne en oppførsel som følger (1). I stedet faller populasjonen etterhvert mot 0 på grunn av *selv-forgiftning*. Det er sannsynlig at dette også gjelder for menneskeheten. Forgiftningen kan skyldes PCB, langlivede radioaktive isotoper og hormonhermere som påvirker fertiliteten. Følgende alternative modell er derfor foreslått for jordas befolkning:

$$\frac{1}{N^*(t^*)}\frac{dN^*(t^*)}{dt^*} = r\left(1 - \frac{N^*(t^*)}{N_m}\right) - c\int_{-\infty}^{t^*} N^*(s^*)\,ds^*,\ c > 0. \tag{2}$$

(b) Hvordan kan en argumentere for siste ledd? Vis at for denne modellen er eneste mulige grense 0 når $t^* \to \infty$.

(c) Anta at $N_m$ er så stor at $N^*$ aldri kommer i nærheten av $N_m$, skalér ligningen og vis at vi tilnærmet kan skrive

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = 1 - \alpha \int_{-\infty}^{t} N(s)\,ds.$$

Løs denne ligningen ved å føre inn $P(t) = \alpha \int_{-\infty}^{t} N(s)\,ds$, og finn ut hvordan befolkningen og forurensningen utvikler seg med tiden.

**Oppgitt for oppgave 1:**

Ligningen $y'' = y'(1-y)$ har, forutsatt $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$, generell løsning

$$y(x) = 2\frac{1}{1+e^{-(x-x_0)}} = \left(1 + \tanh\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right).$$

$$\frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

## Oppgave 2

En lang, tynn stav av porøs sandstein med konstant tverrsnitt $A$ ligger langs $x$-aksen. Porene utgjør en konstant fraksjon $\Phi$ av volumet $(0 < \Phi < 1)$ og er fylt av vann. Vi antar at vannet har konstant tetthet, slik at vi kan måle vannmengde i volum. Sideflata på staven er tett, men vi kan presse vann gjennom steinen ved å legge på en trykkgradient.

For å finne et uttrykk for fluksen av vann i $x$-retning langs staven, $j$ $[m^3/(m^2 s)]$, antar vi at den kun avhenger av *viskositeten* til vannet, $\mu$ $[kg/(ms)]$, *permeabiliteten* (invers strømningsmotstand) til steinen, $K$ $[m^2]$) samt *trykkgradienten*, $\partial p/\partial x$.

(a) Vis at dimensjonsanalyse gir oss

$$j = -k\frac{K}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x},$$

der $k$ er en dimensjonsløs konstant.

Anta nå at staven i tillegg til vann også inneholder olje. Alle porene er enten fylt med vann eller olje, og et steinvolum $V$ inneholder et volum $S_o\Phi V$ olje og $S_v\Phi V$ vann, der $S_o + S_v = 1$. Vi antar at vann og olje har samme trykk, og at fluksene kan skrives på formen

$$j_i = -k_i(S_i)\frac{K}{\mu_i}\frac{\partial p}{\partial x}, \; i = o, v.$$

(b) Sett opp bevarelseslovene for olje og vann for et utsnitt av staven mellom $x = a$ og $x = b$, og vis at hvis vi setter på en trykkgradient slik at

$$q = j_o + j_v = \text{konstant},$$

så vil vi for $S \equiv S_v$ få følgende hyperbolske ligning:

$$\Phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(S) = 0,$$

$$f(S) = \frac{q k_v(S)/\mu_v}{k_o(1-S)/\mu_o + k_v(S)/\mu_v}. \tag{3}$$

(c) Anta at $\mu_o = \mu_v$ , $k_o(1-S) = 1 - S^2$ og $k_v(S) = S^2$. Løs lign. (3) for $t > 0$ for en stav med lengde $L$ når

$$S(x,0) = 1 - x/L, \; 0 \le x \le L,$$
$$S(0,t) = 1, \; 0 \le t.$$

## Oppgave 3

(a) Den vanligste modellen for trafikk av biler langs en vei leder til dimensjonsløs bilfluks på formen $j = \rho(1-\rho)$. Beskriv kort hvordan denne modellen framkommer. Sett opp den hyperbolske diff.-ligningen som modellen leder til (utenom områder med av- og innpåkjørsel). Når utvikler løsningen sjokk?

Vi tar utgangspunkt i modellen i (a). Mellom $x = 0$ og $x = 1$ er det reduksjon i fartsgrensen slik at maksimalhastigheten går ned til 1/2, mens maksimal tetthet forblir den samme. Vi antar at samme type sammenheng mellom hastighet og tetthet også holder i dette området.

(b) Hvilken betingelse på bilfluksen må holde i $x = 0$ og $x = 1$? Finn løsningen $\rho(x,t)$ for $t > 0$ og alle $x$ når

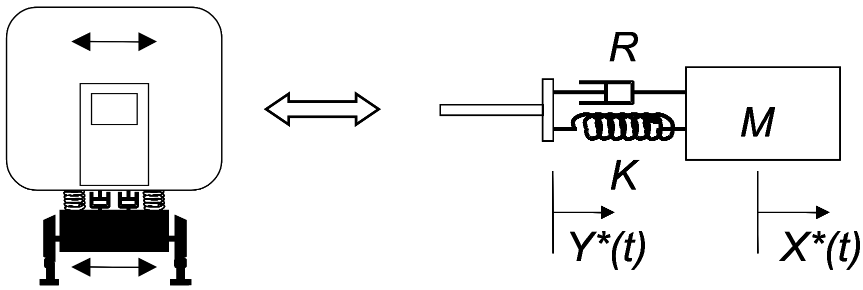
$$\rho(x,0) = \begin{cases} 1/2, & x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

(Vink: Mellom 0 og 1 er $\rho$ konstant for alle $t \ge 0$)

## Oppgave 4

I forbindelse med sammenbruddet av akslingene på *Signaturtoget* foretok fabrikanten *Adtrans* målinger av skinnegangen mellom Oslo og Kristiansand. Målingen av slingringen på skinnegangen har form av en stokastisk prosess, $Z(x)$, der $x$ er posisjonen langs banen og $Z$ er horisontalt utslag. Vi velger nullpunktet slik at forventningen, $\mathbb{E}(Z(x)) = 0$, og antar ellers at $Z(x)$ er svakt stasjonær i $x$. Spektret til $Z$ har formen

$$S_Z(\kappa) = \begin{cases} A, & 0 < \kappa_1 \le |\kappa| \le \kappa_2, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{4}$$




(For å skille rom og tid, bruker vi $\kappa$ i stedet for $\omega$ når vi har en prosess som er en funksjon av $x$).

(a) Vis at slingringen vi observerer når vi sitter på et tog som går med konstant hastighet $U$,

$$Y(t) = Z(x_0 + Ut),$$

er en svak stasjonær stokastisk prosess i tid. Bestem kovariansfunksjonen og vis at spektret til $Y(t)$ kan uttrykkes som

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{U} S_Z\left(\frac{\omega}{U}\right).$$

Bestem variansen til $Y$ og skissér hvordan $S_Y(\omega)$ ser ut for stor og liten hastighet.

Vi vil representere understellet og jernbanevognen med den enkle mekaniske modellen på figuren. Stemplet (understellet) til venstre er forbundet med massen $M$ (vognen) ved hjelp av en lineær demper og en fjær. Bevegelsen $Y^*(t)$ til stemplet medfører en bevegelse $X^*(t)$ til massen.

(b) Vis at ligningen for jernbanevognens bevegelse, $X(t)$, etter en passende skalering, kan skrives

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \delta\frac{dX}{dt} + X(t) = \delta\frac{dY}{dt} + Y(t). \tag{5}$$

Uttrykk spektret til $X$ ved hjelp av spektret til $Y$.

(c) For hvilken dempningskonstant $\delta$ er variansen til $X$ minst når det dimensjonsløse spektret til $Y$ antas å være konstant fra $\omega = 0$ opp til en dimensjonsløs frekvens $\omega_m >> 1$?

(d) Kraften (egentlig momentet) som akslingene utsettes for, kan uttrykkes fra ligning 5 som

$$F(t) = r\left(\delta\left(\frac{dX}{dt} - \frac{dY}{dt}\right) + X(t) - Y(t)\right).$$

Vis, ved en overslagsberegning, at variansen til $F$ er omlag proporsjonal med $U^2$ hvis spektret er som i (4a).

**Oppgitt for Oppgave 4:**

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt,\ \ f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\hat{f}(\omega)\, d\omega.$$

$$Y(t) = h * X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)X(\tau)\, d\tau \implies S_Y(\omega) = (2\pi)^2 \left|\hat{h}(\omega)\right|^2 S_X(\omega).$$

$$S_{aX+bdX/dt+cd^2X/dt^2}(\omega) = \left|a + bi\omega - c\omega^2\right|^2 S_X(\omega).$$

$$\int_0^{\infty} \left|\frac{1+i\delta x}{1+i\delta x - x^2}\right|^2 dx = \frac{\pi}{2}\frac{\delta^2+1}{\delta}.$$