

5036 Matematisk modellering, høsten 2001

Løsningsforslag med kommentarer

NTNU desember 2001

H.E. Krogstad

I dette løsningsforslaget er oppgaveteksten tatt med for hver oppgave etter tur. Kommentarene går utover selve løsningen av oppgavene.

1 Oppgave

(a) Antallet individer i en populasjon, N^* , modelleres ofte med en såkalt *logistisk modell*,

$$\frac{1}{N^*(t^*)} \frac{dN^*(t^*)}{dt^*} = r \left(1 - \frac{N^*(t^*)}{N_m} \right), \quad 0 < r, \quad 0 < N_m. \quad (1)$$

Skalér ligningen og vis hvordan en undersøker stabiliteten til likevektspunktene.

I laboratoriestudier av lukkede bakteriekulturer har det vist seg vanskelig å finne en oppførsel som følger (1). I stedet faller populasjonen etterhvert mot 0 på grunn av *selv-forgiftning*. Det er sannsynlig at dette også gjelder for menneskeheten. Forgiftningen kan skyldes PCB, langlivede radioaktive isotoper og hormonhermere som påvirker fertiliteten. Følgende alternative modell er derfor foreslått for jordas befolkning:

$$\frac{1}{N^*(t^*)} \frac{dN^*(t^*)}{dt^*} = r \left(1 - \frac{N^*(t^*)}{N_m} \right) - c \int_{-\infty}^{t^*} N^*(s^*) ds^*, \quad c > 0. \quad (2)$$

(b) Hvordan kan en argumentere for siste ledd? Vis at for denne modellen er eneste mulige grense 0 når $t^* \rightarrow \infty$.

(c) Anta at N_m er så stor at N^* aldri kommer i nærheten av N_m , skalér ligningen og vis at vi tilnærmet kan skrive

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = 1 - \alpha \int_{-\infty}^t N(s) ds.$$

Løs denne ligningen ved å føre inn $P(t) = \alpha \int_{-\infty}^t N(s) ds$, og finn ut hvordan befolkningen og forurensningen utvikler seg med tiden.

Opgitt for oppgave 1:

Ligningen $y'' = y'(1 - y)$ har, forutsatt $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$, generell løsning

$$y(x) = 2 \frac{1}{1 + e^{-(x-x_0)}} = \left(1 + \tanh \left(\frac{x-x_0}{2} \right) \right).$$

$$\frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

1.1 Løsning

(a) I ligningen uttrykker høyresiden *relativ vekstrate*. Når $N^* \ll N_m$, har vi tilnærmet eksponentiell vekst,

$$\frac{dN^*(t^*)}{dt^*} = N^*(t^*)r,$$

med løsning $N^*(t^*) \propto \exp(rt^*)$. Vekstraten avtar når N^* vokser, og er 0 når $N^*(t^*) = N_m$, som gjerne kalles *bærekraftig kapasitet*. Skaleringen $N^* = NN_m$ og $t^* = t/r$ leder til

$$\dot{N} = N(1 - N) = f(N).$$

Likevektspunktene er $N_0 = 0$ og $N_1 = 1$. Et likevektspunkt er stabilt hvis $df(N)/dN < 0$, og ustabil hvis $df(N)/dN > 0$ (Dette ser en ellers umiddelbart ved å sette inn $N(t) = N_i(t) + n(t)$, $i = 0, 1$, rekkeutvikle og løse for $n(t)$). Her blir N_0 ustabil og N_1 stabil. Merk at *Logan* tar for seg dette eksemplet i detalj.

(b) Det er naturlig at utslippet pr. tidsenhet er proporsjonalt med antall individer. Total mengde forurensninger på tidspunktet t_0 blir da proporsjonal med

$$\int_{-\infty}^{t^*} N^*(s^*) ds^*.$$

I dette ligger det en forutsetning om at forurensningene ikke forsvinner. I tillegg antar vi at den negative påvirkningen på vekstraten er proporsjonal med mengden forurensninger, som gir oppgitt form.

Anta nå at $\lim_{t^* \rightarrow \infty} N^*(t^*) = a > 0$, og at populasjonen starter på $N_s < N_m$. Løsningen vil holde seg mindre enn N_m og følgelig blir

$$\frac{dN^*(t^*)}{dt^*} < N^*(t^*) \left(r - c \int_{-\infty}^{t^*} N^*(s^*) ds^* \right).$$

Siden $\lim_{t^* \rightarrow \infty} N^*(t^*) = a$, vil høyresiden gå mot $-\infty$ når $t^* \rightarrow \infty$, og dette impliserer at også $\frac{dN^*(t^*)}{dt^*} \rightarrow_{t^* \rightarrow \infty} -\infty$, noe som er uforenlig med at $N^*(t^*) \rightarrow a$.

En enkel alternativ modell, som ikke har fullt så dramatiske følger, ville være

$$\frac{1}{N^*(t^*)} \frac{dN^*(t^*)}{dt^*} = r \left(1 - \frac{N^*(t^*)}{N_m} \right) - c \int_{-\infty}^{t^*} e^{-(t^*-s^*)/\tau} N^*(s^*) ds^*. \quad (3)$$

Her brytes forurensningene (eller virkningen på vekstraten) ned med tidskonstant τ , og det ser ut til at denne tillater en viss populasjon å overleve.

(c) Vi skalerer tiden med $1/r$. Det er ingen opplagt skala for N^* , men noe må vi bruke, og det har i dette tilfelle ikke så mye å si *hva* vi bruker. Det er ikke særlig konsistent å bruke N_m siden vi har antatt at N^* aldri kommer i nærheten av N_m , men det er uten betydning for resultatet. Hvis vi derfor setter $N^* = NN_m$ og, som antydnet, sløyfer leddet $-rN^*/N_m$, får vi

$$\frac{1}{NN_m} \frac{d(NN_m)}{d(t/r)} = r - c \int_{-\infty}^{t^*} N_m N(s^*) ds^*, \quad (4)$$

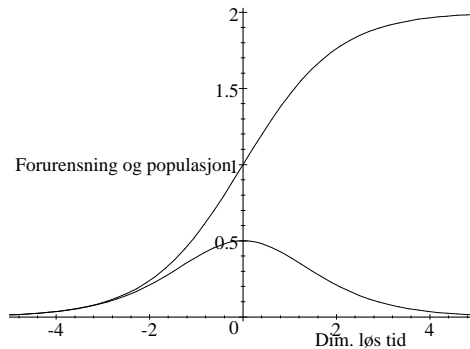


Figure 1: Utvikling av populasjon og forurensning.

dvs.,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} &= 1 - c \int_{-\infty}^{t^*} N_m N(s^*) d\left(\frac{s^*}{r}\right) \\
 &= 1 - (cN_m) \int_{-\infty}^t N(s) ds \\
 &= 1 - \alpha \int_{-\infty}^t N(s) ds.
 \end{aligned} \tag{5}$$

($N(s) = N^*(s/r)/N_m$, og $\alpha = cN_m$).

For å løse ligningen ser vi at $P' = \alpha N$ og $P'' = \alpha N'$. Hvis dette føres inn i lign. 5, får vi

$$P'' = P'(1 - P). \tag{6}$$

Siden vi opplagt har at $\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t) = 0$, kan vi benytte oppgitt løsning:

$$P(t) = 1 + \tanh\left(\frac{t - t_0}{2}\right).$$

(Dette er løsningen ellers av en logistisk ligning som vi får ved å integrere lign. 6 én gang og bruke at $P(t) \rightarrow 0$ når $t \rightarrow -\infty$). For N finner vi i følge oppgitt formel

$$N(t) = \frac{1}{\alpha} P'(t) = \frac{1}{2\alpha} \cosh^{-2}\left(\frac{t - t_0}{2}\right).$$

Merk at populasjonen har sin største verdi, $1/2\alpha$, for $t = t_0$. Løsningen er tegnet opp for $\alpha = 1$ på fig. 1.

Utsiktene er altså ikke alt for lyse. Hvis vi observerer befolkningstallet og finner ut når $N''(t_s) = 0$, kan vi fra $N(t_s)$ og $N'(t_s)$ faktisk estimere når befolkningsantallet når sitt maksimum og hva det er.

Jordas befolkning ser ut til å ha gått gjennom vendepunktet $N''(t_s) = 0$ i 1996, da vi hadde, i følge mine kilder,

$$\begin{aligned}
 N(t_s) &= 5.87 \times 10^9, \\
 \frac{dN}{dt}(t_s) &= 8.3 \times 10^7 \text{ år}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Dette vil tilsvare et maksimum, $N_{\max} = 8.8 \times 10^9$ omkring 2050.

2 Oppgave

En lang, tynn stav av porøs sandstein med konstant tverrsnitt A ligger langs x -aksen. Porene utgjør en konstant fraksjon Φ av volumet ($0 < \Phi < 1$) og er fylt av vann. Vi antar at vannet har konstant tetthet, slik at vi kan måle vannmengde i volum. Sideflata på staven er tett, men vi kan presse vann gjennom steinen ved å legge på en trykkgradient.

For å finne et uttrykk for fluksen av vann i x -retning langs staven, j [$m^3/(m^2s)$], antar vi at den kun avhenger av *viskositeten* til vannet, μ [$kg/(ms)$], *permeabiliteten* (invers strømningsmotstand) til steinen, K , [m^2], samt *trykkgradienten*, $\partial p/\partial x$.

(a) Vis at dimensjonsanalyse gir oss

$$j = -k \frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

der k er en dimensjonsløs konstant.

Anta nå at staven i tillegg til vann også inneholder olje. Alle porene er enten fylt med vann eller olje, og et steinvolum V inneholder et volum $S_o\Phi V$ olje og $S_v\Phi V$ vann, der $S_o + S_v = 1$. Vi antar at vann og olje har samme trykk, og at fluksene kan skrives på formen

$$j_i = -k_i(S_i) \frac{K}{\mu_i} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad i = o, v.$$

(b) Sett opp bevarelseslovene for olje og vann for et utsnitt av staven mellom $x = a$ og $x = b$, og vis at hvis vi setter på en trykkgradient slik at

$$q = j_o + j_v = \text{konstant},$$

så vil vi for $S \equiv S_v$ få følgende hyperbolske ligning:

$$\begin{aligned} \Phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(S) &= 0, \\ f(S) &= \frac{q k_v(S)/\mu_v}{k_o(1-S)/\mu_o + k_v(S)/\mu_v}. \end{aligned} \quad (7)$$

(c) Anta at $\mu_o = \mu_v$, $k_o(1-S) = 1-S^2$ og $k_v(S) = S^2$. Løs lign. (7) for $t > 0$ for en stav med lengde L når

$$\begin{aligned} S(x, 0) &= 1 - x/L, \quad 0 \leq x \leq L, \\ S(0, t) &= 1, \quad 0 \leq t. \end{aligned}$$

2.1 Løsning

(a) Vi stiller opp dimensjonsmatrisen etter å ha observert at trykk er kraft pr. flateenhet

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] = \frac{[p]}{m} = \frac{kgm}{s^2} \frac{1}{m^3} = \frac{kg}{s^2 m^2}.$$

Dimensjonsmatrisen blir da med de oppgitte enhetene:

	j	K	μ	$\partial p/\partial x$
kg	0	0	1	1
m	1	2	-1	-2
s	-1	0	-1	-2

Vi ser at rangen er 3, og følgelig har vi én dimensjonsløs kombinasjon. Det er lett å se at den oppgitte formen stemmer. Det er ellers fysisk rimelig at fluksen går mot trykkgradienten.

En tilsvarende relasjon holder også for tredimensjonal strømning,

$$\mathbf{j} = -k \frac{K}{\mu} \nabla p,$$

men generelt vil K være en *andre ordens tensor*. Dette er tilfellet hvis ikke strømmingen går like lett i alle retningen, typisk for *skifer*, for eksempel.

(b) Staven ligger langs x -aksen og har konstant tverrsnitt A . Bevarelsesloven for et utsnitt av staven mellom $x = a$ og $x = b$ blir da

$$\frac{d}{dt} \int_a^b (S_i \Phi) A dx + j_i(b) A - j_i(a) A = 0, \quad i = o, v.$$

Differensialformuleringen følger på vanlig måte ved å la $a \rightarrow b$:

$$\Phi \frac{\partial S_i}{\partial t} + \frac{\partial j_i}{\partial x} = 0, \quad i = o, v.$$

Vi eliminerer $\frac{\partial p}{\partial x}$ ved å addere ligningene for fluksen (summen skulle være konstant lik q):

$$-\left(k_o(S_o) \frac{K}{\mu_o} + k_v(S_v) \frac{K}{\mu_v} \right) \frac{\partial p}{\partial x} = q,$$

dvs.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{q}{\left(k_o(S_o) \frac{K}{\mu_o} + k_v(S_v) \frac{K}{\mu_v} \right)}.$$

Ved å sette dette inn i ligningen for $S \equiv S_v$, får vi oppgitt ligning:

$$\begin{aligned} \Phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial j_v}{\partial x} &= \\ &= \Phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_v(S) \frac{K}{\mu_v} \frac{q}{\left(k_o(1-S) \frac{K}{\mu_o} + k_v(S) \frac{K}{\mu_v} \right)} \right) \\ &= \Phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(S) = 0. \end{aligned}$$

En mer elegant løsning er å si

$$j_v = \frac{q j_v}{q} = \frac{q j_v}{j_o + j_v} = q k_v(S) \frac{\frac{K}{\mu_v}}{\left(k_o(1-S) \frac{K}{\mu_o} + k_v(S) \frac{K}{\mu_v} \right)}.$$

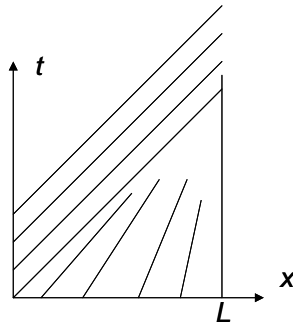


Figure 2: Skisse av karakteristikkene.

(c) Fra oppgitte størrelser ser vi at fluksen for vann blir $j_v = f(S) = qS^2$, og ligningen reduserer seg til

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{q}{\Phi} \frac{\partial (S^2)}{\partial x} = 0.$$

Dette er en vanlig 1. ordens hyperbolsk ligning med kinematisk hastighet

$$c(S) = \frac{2q}{\Phi} S.$$

I fig. 2 har vi skissert et karakteristikk-diagram.

For å studere dette mer nøyaktig, setter vi opp ligningen for en karakteristikk som starter i punktet x_0 , $0 < x_0 < L$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{2q}{\Phi} S(x_0) t \\ &= x_0 + \frac{2q}{\Phi} \left(1 - \frac{x_0}{L}\right) t \end{aligned}$$

Vi ser at alle karakteristikkene møtes i punktet $x = L$, $t = \frac{\Phi L}{2q}$. Fra skissen ovenfor ser vi da videre at løsningen blir $S = 1$ ovenfor karakteristikken som starter i origo, dvs. $x = \frac{2qt}{\Phi}$. For et punkt (x_s, t_s) *nedfor* denne karakteristikken har vi

$$x_s = x_0 + \frac{2q}{\Phi} \left(1 - \frac{x_0}{L}\right) t_s,$$

dvs.

$$x_0 = L \frac{2qt_s - x_s \Phi}{2qt_s - \Phi L}$$

og

$$S(x_s, t_s) = S(x_0, 0) = 1 - \frac{x_0}{L} = 1 - \frac{2qt_s - x_s \Phi}{2qt_s - \Phi L} = \frac{x_s - L}{2qt_s/\Phi - L}.$$

3 Oppgave

(a) Den vanligste modellen for trafikk av biler langs en vei leder til dimensjonsløs bilfluks på formen $j = \rho(1 - \rho)$. Beskriv kort hvordan denne modellen framkommer. Sett opp den hyperbolske diff.-ligningen som modellen leder til (utenom områder med av- og innpåkørsel). Når utvikler løsningen sjokk?

Vi tar utgangspunkt i modellen i (a). Mellom $x = 0$ og $x = 1$ er det reduksjon i fartsgrensen slik at maksimalhastigheten går ned til $1/2$, mens maksimal tetthet forblir den samme. Vi antar at samme type sammenheng mellom hastighet og tetthet også holder i dette området.

(b) Hvilken betingelse på bilfluksen må holde i $x = 0$ og $x = 1$? Finn løsningen $\rho(x, t)$ for $t > 0$ og alle x når

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 1/2, & x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

(Vink: Mellom 0 og 1 er ρ konstant for alle $t \geq 0$)

3.1 Løsning

(a) Modellen starter med å definere en tetthet ρ^* som ligger mellom 0 og en maksimal tetthet ρ_{\max} . Bilhastigheten antas å være en lineær funksjon av ρ^* , $v^* = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho^*}{\rho_{\max}}\right)$. Dermed blir fluksen $j^* = \rho^* v^* = \rho^* v_{\max} \left(1 - \frac{\rho^*}{\rho_{\max}}\right)$. Skalering med

$$\begin{aligned} \rho^* &= \rho \rho_{\max}, \\ x^* &= Lx, \\ t^* &= (L/v_{\max})t \end{aligned}$$

resulterer i $j = \rho(1 - \rho)$ og ligningen

$$\begin{aligned} \rho_t + c(\rho) \rho_x &= 0, \\ c(\rho) &= \frac{dj}{d\rho} = 1 - 2\rho. \end{aligned}$$

Siden $c(\rho)$ avtar når ρ øker, vil en situasjon der $\rho(x_1, t) < \rho(x_2, t)$ for $x_1 < x_2$ utvikle sjokk.

(b) I $x = 0$ og $x = 1$ er det ingen mulighet for å akkumulere biler, slik at *fluksen må være kontinuerlig i disse punktene for $t > 0$* .

Mellom $x = 0$ og 1 vil fluksen ha formen

$$\frac{1}{2}\rho(1 - \rho),$$

og ut fra tipset kan vi anta at $\rho = 1/2$ og fluksen er $1/8$ i dette området *for alle $t \geq 0$* . Da gjenstår å finne løsningen for $x < 0$ og $x > 1$. I disse to områdene svarer $j = 1/8$ til to mulige tettheter, nemlig løsningene av

$$\frac{1}{8} = \rho(1 - \rho).$$

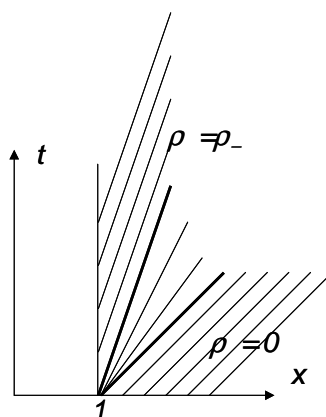


Figure 3: Karakteristikkene for løsningen i området $x > 1$.

Dvs.

$$\rho_+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2},$$

$$\rho_- = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

I området $x > 1$ er forholdene som skissert på fig. 3.

”Grense-karakteristikkene” som starter i $x = 1$ har ligningene

$$x = 1 + t,$$

$$x = 1 + (1 - 2\rho_-)t = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}t.$$

I området mellom disse karakteristikkene har vi en ekspansjonsbølge slik at

$$x = 1 + (1 - 2\rho)t,$$

dvs,

$$\rho(x, t) = \frac{1 - x + t}{2t}$$

For $x < 0$ har vi en situasjon der $\rho = 1/2$ tilsvarer en fluks på $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Det er *umulig* å ha en slik fluks umiddelbart til venstre for $x = 0$, siden fluksen umiddelbart til høyre for $x = 0$ maksimalt kan bli $1/8$. Det som skjer er at det bygger seg opp en kø til venstre for $x = 0$ med tettheten $\rho = \rho_+$. I bakkant av denne køen får vi et sjokk. Situasjonen er skissert på fig. 4.

Vi bestemmer bevegelsen til sjokket fra diff.-ligningen

$$\frac{dx}{dt} = U = \frac{1/8 - 1/4}{\rho_+ - 1/2} = \frac{1/8 - 1/4}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} - 1/2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Sjokket har med andre ord *konstant hastighet* og beskrives av ligningen

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{4}t$$

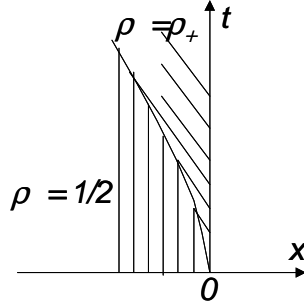


Figure 4: Skisse av løsningen til venstre for $x = 0$.

som beskriver *et rett linjestykke* som starter i origo.

Tilsammen kan vi oppsummere løsningen som følger:

		ρ
$x < 0$	$x < -\frac{\sqrt{2}}{4}t$	$\frac{1}{2}$
$x < 0$	$x > -\frac{\sqrt{2}}{4}t$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$
$0 < x < 1$	$t \geq 0$	$\frac{1}{2}$
$1 < x$	$t < x - 1$	0
$1 < x$	$x - 1 < t < (x - 1)\sqrt{2}$	$\frac{1-x+t}{2t}$
$1 < x$	$(x - 1)\sqrt{2} < t$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$

4 Oppgave

I forbindelse med sammenbruddet av akslingene på *Signaturtoget* foretok fabrikanten *Adtrans* målinger av skinnegangen mellom Oslo og Kristiansand. Målingen av slingringen på skinnegangen har form av en stokastisk prosess, $Z(x)$, der x er posisjonen langs banen og Z er horisontalt utslag. Vi velger nullpunktet slik at forventningen, $\mathbb{E}(Z(x)) = 0$, og antar ellers at $Z(x)$ er svakt stasjonær i x . Spektret til Z har formen

$$S_Z(\kappa) = \begin{cases} A, & 0 < \kappa_1 \leq |\kappa| \leq \kappa_2, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (8)$$

(For å skille rom og tid, bruker vi κ i stedet for ω når vi har en prosess som er en funksjon av x).

(a) Vis at slingringen vi observerer når vi sitter på et tog som går med konstant hastighet U ,

$$Y(t) = Z(x_0 + Ut),$$

er en svak stasjonær stokastisk prosess i tid. Bestem kovariansfunksjonen og vis at spektret til $Y(t)$ kan uttrykkes som

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{U} S_Z\left(\frac{\omega}{U}\right).$$

Bestem variansen til Y og skissér hvordan $S_Y(\omega)$ ser ut for stor og liten hastighet.

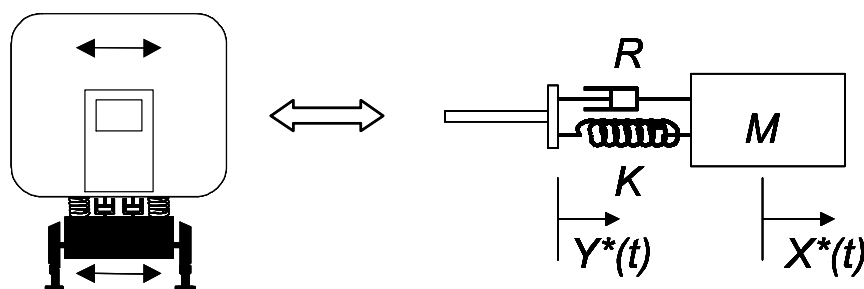


Figure 5: Jernbanevogn og mekanisk analogi.

Vi vil representere understellet og jernbanevognen med den enkle mekaniske analogien på fig. 5. Stemplet (understellet) til venstre er forbundet med massen M (vognen) ved hjelp av en lineær demper og en fjær. Bevegelsen $Y^*(t)$ til stemplet medfører en bevegelse $X^*(t)$ til massen.

(b) Vis at ligningen for jernbanevognens bevegelse, $X(t)$, etter en passende skalering, kan skrives

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \delta \frac{dX}{dt} + X(t) = \delta \frac{dY}{dt} + Y(t). \quad (9)$$

Uttrykk spektret til X ved hjelp av spektret til Y .

(c) For hvilken dempningskonstant δ er variansen til X minst når det dimensjonsløse spektret til Y antas å være konstant fra $\omega = 0$ opp til en dimensjonsløs frekvens $\omega_m \gg 1$?

(d) Kraften (egentlig momentet) som akslingene utsettes for, kan uttrykkes fra ligning 9 som

$$F(t) = r \left(\delta \left(\frac{dX}{dt} - \frac{dY}{dt} \right) + X(t) - Y(t) \right).$$

Vis, ved en overslagsberegning, at variansen til F er omlag proporsjonal med U^2 hvis spektret er som i (4a).

Oppgitt for Oppgave 4:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega.$$

$$Y(t) = h * X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) X(\tau) d\tau \implies S_Y(\omega) = (2\pi)^2 |\hat{h}(\omega)|^2 S_X(\omega).$$

$$S_{aX+bdX/dt+cd^2X/dt^2}(\omega) = |a + bi\omega - c\omega^2|^2 S_X(\omega).$$

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{1 + i\delta x}{1 + i\delta x - x^2} \right|^2 dx = \frac{\pi}{2} \frac{\delta^2 + 1}{\delta}.$$

4.1 Løsning

Idéen til oppgaven er hentet fra en studie som *Adtrans* utførte ved *ECMI Modelling Week* i Lund sommeren 2000.

(a) Vi ser at Y har 0 middelvei for alle t :

$$\mathbb{E}(Y(t)) = \mathbb{E}(Z(x_0 + Ut)) = 0.$$

Videre har vi

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y(t_1), Y(t_2)) &= \\ &= \text{Cov}(Z(x_0 + Ut_1), Z(x_0 + Ut_2)) \\ &= C_Z(U(t_2 - t_1)), \end{aligned}$$

siden Z var svakt stasjonær. Men dette er nettopp det som skal til for at også Y er svakt stasjonær:

$$C_Y(t) = \text{Cov}(Y(t_0), Y(t_0 + t)) = C_Z(Ut).$$

For spektret får vi

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} C_Y(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} C_Z(Ut) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{U} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega/U)Ut} C_Z(Ut) d(Ut) \\ &= \frac{1}{U} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega/U)s} C_Z(s) ds \\ &= \frac{1}{U} S_Z\left(\frac{\omega}{U}\right). \end{aligned}$$

Vi ser at variansen til Y blir

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{U} S_Z\left(\frac{\omega}{U}\right) d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_Z(\kappa) d\kappa \\ &= 2 \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} A d\kappa = 2A(\kappa_2 - \kappa_1). \end{aligned}$$

Variansen er med andre ord den samme for Z og Y , uansett hvilken hastighet toget har, og vi overlater til leseren å tegne opp S_Y for ulike verdier av U .

(b) Ligningen følger umiddelbart fra Newtons lov:

$$M \frac{d^2 X^*}{dt^{*2}} = R \left(\frac{dY^*}{dt^*} - \frac{dX^*}{dt^*} \right) + K(Y^* - X^*).$$

Vi lar skalaen for X^* være lik skalaen for Y^* , nemlig standardavviket for Y^* , σ_{Y^*} . Egenfrekvensen til systemet (for $R = 0$) er $\omega_0 = \sqrt{K/M}$, og følgelig kan vi bruke ω_0^{-1} som tidsskala. Vi fører inn dette og får umiddelbart

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{R}{K} \omega_0 \left(\frac{dY}{dt} - \frac{dX}{dt} \right) + (Y - X),$$

som er identisk med det som er oppgitt i oppgaven med $\delta = \frac{R}{K}\omega_0$. Transferfunksjonen til derivasjon er ($i\omega$), og følgelig blir

$$\begin{aligned} S_{\delta\dot{X}+X} &= |-\omega^2 + i\delta\omega + 1|^2 S_X, \\ S_{\delta\dot{Y}+Y} &= |i\delta\omega + 1|^2 S_Y. \end{aligned}$$

Dermed får vi

$$S_X(\omega) = \left| \frac{1 + i\delta\omega}{1 + i\delta\omega - \omega^2} \right|^2 S_Y(\omega). \quad (10)$$

(c) Siden $\omega_m \gg 1$, vet vi at

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= 2 \int_0^{\omega_m} \left| \frac{1 + i\delta\omega}{1 + i\delta\omega - \omega^2} \right|^2 A d\omega \\ &\approx 2A \int_0^{\infty} \left| \frac{1 + i\delta\omega}{1 + i\delta\omega - \omega^2} \right|^2 d\omega \end{aligned} \quad (11)$$

$$= 2A \frac{\pi}{2} \frac{\delta^2 + 1}{\delta} = A\pi \frac{\delta^2 + 1}{\delta}. \quad (12)$$

Minimum for høyre side oppnås for $\delta = 1$ siden

$$\frac{d}{d\delta} \left(\frac{\delta^2 + 1}{\delta} \right) = \frac{\delta^2 - 1}{\delta^2}.$$

Legg forøvrig merke til at når $\omega_m \rightarrow \infty$, vil $\text{Var}(X)$ gå mot konstanten $A\pi \frac{\delta^2 + 1}{\delta}$, mens variansen til Y er $2A\omega_m$, og går mot uendelig!

(d) Det som betyr noe for variansen når $U \rightarrow \infty$ er hvordan spektret til F oppfører seg for store frekvenser. Vi vet ut fra formen på F at spektret til F blir en funksjon av ω multiplisert med spektret til Y . Det er bare forskjellig fra 0 mellom $U\kappa_1$ og $U\kappa_2$. Spektret til $\delta\dot{Y} + Y$ er

$$|i\delta\omega + 1|^2 S_Y(\omega),$$

og går følgelig omlag som $\omega^2 S_Y(\omega)$ for store ω . På tilsvarende måte får vi for spektret til $\delta\dot{X} + X$:

$$|i\delta\omega + 1|^2 S_X(\omega) = |i\delta\omega + 1|^2 \frac{|i\delta\omega + 1|^2}{|1 + i\delta\omega - \omega^2|^2} S_Y(\omega) \sim S_Y(\omega).$$

Det ser derfor ut til at spektret til $\delta\dot{Y} + Y$ dominerer.

Alternativt kan en ved hjelp av formelen for transferfunksjoner skrive

$$\begin{aligned} F(t) &= r \left(\delta \left(\frac{dX}{dt} - \frac{dY}{dt} \right) + X(t) - Y(t) \right) = r \left(\left(\delta \frac{d}{dt} + I \right) X - \left(\delta \frac{d}{dt} + I \right) Y \right) \\ &= r \left(\left(\delta \frac{d}{dt} + I \right) HY - \left(\delta \frac{d}{dt} + I \right) Y \right) = r \left(\left(\delta \frac{d}{dt} + I \right) H - \left(\delta \frac{d}{dt} + I \right) \right) Y, \end{aligned}$$

og dette gir da den nøyaktige sammenhengen

$$S_F(\omega) = r^2 \left| \frac{(i\delta\omega + 1)^2}{1 + i\delta\omega - \omega^2} - i\delta\omega - 1 \right|^2 S_Y(\omega). \quad (13)$$

Vi ser at for store ω vil

$$S_F(\omega) \approx (r\delta)^2 \omega^2 S_Y(\omega).$$

Det *aller* enkleste er imidlertid å bruke at kraften er $F(t) = -\ddot{X}(t)$, og følgelig blir

$$S_F(\omega) = r^2(i\omega)^4 S_X(\omega) = r^2(i\omega)^4 \left| \frac{i\delta\omega + 1}{1 + i\delta\omega - \omega^2} \right|^2 S_Y(\omega), \quad (14)$$

som er identisk med lign. 13.

Med spektret fra (a) blir dette

$$\begin{aligned} \text{Var } F &\approx (r\delta)^2 \frac{A}{U} \int_{U\kappa_1}^{U\kappa_2} \omega^2 d\omega \\ &= (r\delta)^2 \frac{A}{U} \frac{1}{3} \left((U\kappa_2)^3 - (U\kappa_1)^3 \right) \\ &= (r\delta)^2 \frac{A}{3} U^2 (\kappa_2^3 - \kappa_1^3). \end{aligned}$$

Følgelig blir $\text{Var } F \propto U^2$, et kanskje ikke helt uventet resultat.