Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald E. Krogstad, tlf: 9 35 36/ mobil:416 51 817

Eksamen i SIF5036 Matematisk modellering

Lørdag 14. desember 2002
Kl. 0900-1500

Sensur: 14. januar 2003

Tillatte hjelpemidler:
Rottmann: Matematisk formelsamling,
Enkel kalkulator

Oppgave 1

(a) Hvilke aksiomer om naturen ligger til grunn for dimensjonsanalysen? Hva sier Buckingham's Pi-teorem, og hvordan kan en bruke teoremet til å vise at perioden for en matematisk pendel må være uavhengig av massen?

(b) Ved bestandsvurdering av skog ønsker en å estimere kubikkinnholdet (volumet v) av et tre ved å måle diameteren (d) ved bakken og høyden (h) (det siste ved triangulering). I et eksempel i *Minitab* har en kommet fram vil følgnede regresjonsmodell for kubikkinnholdet i amerikansk kirsebærtre:

$$v^{1/3} = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 h + \beta_3 d^2 \tag{1}$$

(β_i, $i = 0, \cdots, 3$ er regresjonskoeffisienter). Vis at dimensjonsanalyse i stedet anbefaler en relasjon på formen $\pi_1 = \phi(\pi_2)$. Gi eksempel på hva ϕ kan være for "idealiserte" trær.

(Det viser seg at formelen med utgangspunkt i dimensjonsanalyse gir mye bedre datatilpassing!)

Oppgave 2
Ei elv renner ut i et havbasseng. Elva bringer med seg sand og leire, slik at bassenget etterhvert fylles opp.

Vi skal sette opp en enkel endimensjonal modell for hvordan bassenget fylles, og vi antar at bassenget strekker seg fra $x = 0$ til $+\infty$ og har et konstant dyp h ved $t = 0$. Forholdene på tvers (i y-retningen) er konstante.

Mengden av sand og leire som legger seg på bunnen pr. tid og flateenhet betegnes med $q\,(x,t)$. Vi beskriver vanndypet ved $z = b\,(x,t)$, $x \geq 0$, $t \geq 0$, og regner $b\,(x,t) \leq 0$. Hvis bunnen skråner, vil partiklene på bunnen fortsette å bevege seg, og det har vist seg at denne forflytningen er proposjonal med hvor bratt bunnen er, dvs. at volumfluksen har formen

$$j = -k\frac{\partial b}{\partial x}. \tag{2}$$

(a) Still opp bevaringsloven på integralform for et utsnitt av bunnen, $x_0 \leq x \leq x_1$, og vis at vi på differensialform kommer fram til ei ligning for $b\,(x,t)$ som i form er identisk med varmeledningsligningen,

$$\frac{\partial b}{\partial t} = k\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + q. \tag{3}$$

(b) Anta at *all* grus og leire kommer inn ved $x = 0$ (dvs. $q = 0$ for $x > 0$), og at tilførselen alltid er tilstrekkelig til at ligning 3 holder for $t > 0$. Argumentér for at løsningen til 3 i dette tilfelle vil være en similaritetsløsning, og finn $b\,(x,t)$ for $x \geq 0$ og $t > 0$.

(Det oppgis at ligningen

$$\frac{d^2 y}{d\eta^2} + \frac{\eta}{2}\frac{dy}{d\eta} = 0 \tag{4}$$

har generell løsning $A + B\,\mathrm{erf}\,(\eta/2)$, der $\mathrm{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp\left(-s^2\right) ds$)

(c) Et mer realistisk scenario er at etterhvert som tiden går (geologisk tidsskala), vil strandkanten $s\,(t)$ flytte seg utover. Anta at vi har en konstant volumstrøm q_0 ut i bassenget pr. tids- og breddeenhet ved strandkanten, og at all sand og leire tilføres på denne måten.

Løsningen for $b(x,t)$ blir da stasjonær i forhold til stranda, dvs. $b(x,t)$ kan skrives ved hjelp av en funksjon b_0 slik at

$$b(x,t) = \begin{cases} 0 & x \leq s(t) = Ut + x_0 \\ b_0(x - Ut - x_0) & x > Ut + x_0 \end{cases} \tag{5}$$

Bestem hastigheten U og løsningen i dette tilfellet.

Oppgave 3

Det er foreslått å modellere forekomsten av kongekrabbe, $K(t)$, i Varangerfjorden ved hjelp av følgende differensialligning

$$\frac{dK}{dt} = rK\left(1 - \frac{K}{M}\right)\left(\frac{K}{m} - 1\right),\ 0 < m < M. \tag{6}$$

(a) Hvilke egenskaper prøver modellen å beskrive og hvilke likevektspopulasjoner har vi? Vis hvordan en kan bruke lineær stabilitetsanalyse til å avgjøre stabiliteten av likevektspopulasjonene, og lag kvalitative skisser for utviklingen av $K(t)$ for $t > 0$.

(b) En forenklet modell, som også omfatter fiskere, $F(t)$, har etter skalering formen

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= -\frac{F}{2} + KF, \\ \frac{dK}{dt} &= K(1-K) - F \end{aligned} \tag{7}$$

Hvilke kvalitative egenskaper er bygd inn i *denne* modellen? Det oppgis at banen $F = 3K(1-K)/2,\ 0 \leq K \leq 1$, er en løsning av lign. 7, og at banen deler første (F,K)-kvadrant i to separate deler. Hva skjer når systemet befinner seg i den ubegrensede delen?

(c) Bestem likevektspunktene for modellen i lign. 7 og finn ut hva de representerer. Hva ser ut til å skje i området definert ved $0 \leq K \leq 1$ og $0 \leq F \leq 3K(1-K)/2$?

Oppgave 4

For å modellere kongekrabbenes spredning langs Finnmarkskysten vil vi anta at de sprer seg ved "tilfeldig gang", slik at fluksen er $\mathbf{j}^* = -D\nabla^*\rho^*$, der $\rho^*(\mathbf{x}^*, t^*)$ er tettheten (antall krabber pr. flateenhet), D er en konstant, og $\nabla^* = \frac{\partial}{\partial x^*}\hat{\imath}_x + \frac{\partial}{\partial y^*}\hat{\imath}_y$. Formeringen (pr. flateenhet) av krabbe skjer etter en forenklet modell som i oppgave 3:

$$q(\mathbf{x}^*, t^*) = r\rho^*(\mathbf{x}^*, t^*)\left[1 - \frac{\rho^*(\mathbf{x}^*, t^*)}{\rho_{\max}}\right]. \tag{8}$$

Vi ser helt bort fra fangst.

(a) Still opp bevaringsloven for krabbe på integralform for et område av havet og vis at differensial-formuleringen leder til en ikke-lineær diffusjonsligning som etter passende skalering kan skrives

$$\rho_t = \nabla^2 \rho + \rho\,(1-\rho)\,. \tag{9}$$

Nedenfor skal vi betrakte ligning 9 i én romdimensjon (x),

$$\rho_t = \rho_{xx} + \rho\,(1-\rho)\,. \tag{10}$$

(b) Ligning 10 har konstante løsninger $\rho_0 = 0$ og $\rho_1 = 1$. Sjekk stabiliteten til disse løsningene ved å føre inn løsninger på formen $\rho\,(x,t) = \rho_j + a\,(t)\exp(ikx)$, $j = 0, 1$, $|a| \ll 1$.

(c) Det kan vises (men skal ikke utledes eller verifiseres her) at lign. 10 har en løsning

$$\rho\,(x,t) = \left(1 + \exp\left(\sqrt{\frac{1}{6}}x - \frac{5}{6}t\right)\right)^{-2} \tag{11}$$

Hvilken situasjon beskriver denne løsningen? Anslå tiden det tar fra krabben er observert på et sted til bestanden er av samme størrelsesorden som det maksimale hvis $r = 0.3\text{år}^{-1}$.