Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag

til eksamen i SIF5036 Matematisk modellering 14. desember 2002.

Oppgave 1

(a) Hvilke aksiomer om naturen ligger til grunn for dimensjonsanalysen? Hva sier Buckingham's Pi-teorem, og hvordan kan en bruke teoremet til å vise at perioden for en pendel må være uavhengig av dens masse?

- Alle relasjoner må være dimensjonsmessig korrekte
- Ingen relasjon kan avhenge av tilfeldig valgte enheter

Hvis det fins en relasjon

$$\Phi(R_1, \cdots, R_N) = 0$$

fins det også en ekvivalent relasjon

$$\Psi(\pi_1, \cdots, \pi_{N-r}) = 0$$

der $\pi_1, \cdots, \pi_{N-r}$ dimensjonsløse kombinasjoner laget ved hjelp av r kjernevariable med uavhengig dimensjon, der r er også rangen til dimensjonsmatrisen.

(b) Ved bestandsvurdering av skog ønsker en å estimere kubikkinnholdet (volumet v) av et tre ved å måle dimeteren (d) ved bakken og høyden (h) (det siste ved triangulering). I et eksempel i Minitab har en kommet fram vil følgede regressjonsmodell for kubikkinnholdet i amerikansk kirsebærtre

$$v^{1/3} = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 h + \beta_3 d^2,$$

(β_i, $i = 0, \cdots, 3$ er regressjonskoeffisienter). Vis at dimensjonsanalyse i stedet anbefaler en relasjon på formen $\pi_1 = \phi(\pi_2)$. Gi eksempel på hva ϕ kan være for "idealiserte trær".

Vi går ut fra en relasjon

$$\Phi(v, d, h) = 0$$

Inngår bare en enhet (meter) i alle størrelsene, slik at det må være $3 - 1 = 2$ dimensjonsløse kombinasjoner π_1 og π_2, og en relasjon $\pi_1 = \phi(\pi_2)$. Vi kan velge d som kjernevariabel slik at $\pi_1 = v/d^3$ og $\pi_2 = h/d$. Da får vi

$$\frac{v}{d^3} = \phi\left(\frac{h}{d}\right).$$

For et kjegleformet "tre" uten grener er $v = \pi h d^2/12$ slik at

$$\frac{v}{d^3} = \frac{\pi}{12}\frac{h}{d}.$$

Oppgave 2
Ei elv renner ut et havbasseng. Elva bringer med seg sand og leire, slik at bassenget etterhvert fylles opp.

Vi skal sette opp en enkel endimensjonal modell for hvordan bassenget fylles, og vi antar at bassenget strekker seg fra $x = 0$ til $+\infty$ og har et konstant dyp h ved $t = 0$. Vi antar at forholdene på tvers (i y-retningen) er konstante.

Mengden av sand og leire som legger seg på bunnen pr. tid og flateenhet betegnes med $Q(x, t)$. Vi beskriver vanndypet ved $z = b(x, t)$, $x \geq 0$, $t \geq 0$, og regner $b(x, t) \leq 0$. Hvis bunnen skråner, vil partiklene på bunnen fortsette å bevege seg, og det har vist seg at denne forflytingen er proposjonal med hvor bratt bunnen er, dvs. at volumfluksen har formen

$$j = -k\frac{\partial b}{\partial x}. \tag{1}$$

(a) *Still opp bevarelsesloven på integralform for et utsnitt av bunnen, $a \leq x \leq b$, og vis at vi på differensialform kommer fram til ei ligning for $b(x, t)$ som i form er identisk med varmeledningsligningen,*

$$\frac{\partial b}{\partial t} = k\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + q. \tag{2}$$

Vi regner med et utsnitt med bredde B og innfører først tetthet, fluks og kilde. Her kan vi godt la tettheten være en konstant massetetthet ρ. Fluksen blir da ρj og kilde-funksjonen blir $\rho q(x, t)$. Vårt kontrollvolum har bredde B, og går fra $x = x_0$ til $x = x_1$. Da får vi fra den generelle bevarelsesloven

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} \rho B\left(b(x,t) - h\right)dx + \left(-k\frac{\partial b}{\partial x}(x_1, t) + k\frac{\partial b}{\partial x}(x_0, t)\right)\rho B = \int_{x_0}^{x_1} q(x,t)(\rho B)\,dx.$$

Etter å ha forkortet med ρB gir dette

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} \left(b(x,t) - h\right)dx + \left(-k\frac{\partial b}{\partial x}(x_1, t) + k\frac{\partial b}{\partial x}(x_0, t)\right) = \int_{x_0}^{x_1} q(x,t)\,dx,$$

som blir bevarelsesloven på integralform. Hvis vi lar $x_1 \to x_0$ og dividerer med $(x_1 - x_0)$ blir dette på vanlig måte

$$\frac{\partial}{\partial t}(b - h) = \frac{\partial b}{\partial t} = k\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + q.$$

(b) Anta at all grus og leire kommer inn ved $x = 0$, og tilførselen alltid er tilstrekkelig til at ligning 2 holder og $b(0, t) = 0$ for $t > 0$. Gjør rede for at løsningen til 2 i dette tilfelle vil være en similaritetsløsning, og finn $b(x, t)$ for $x \geq 0$ og $t > 0$. Det oppgis at ligningen

$$\frac{d^2 y}{d\eta^2} + \frac{\eta}{2}\frac{dy}{d\eta} = 0$$

har generell løsning $A + B\,\mathrm{erf}\,(\eta/2)$, *der* $\mathrm{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-s^2\right) ds$.

I dette tilfelle er alså kilden lokalisert til $x = 0$, slik at ligningen for $x > 0$ blir $b_t = kb_{xx}$. Vi skalerer b med h og kan da skrive løsningen

$$b = hf\,(x, t, k)$$

Det er ellers ikke umiddelbart opplagt at vi vil ha en similaritetsløsning siden dybden h jo er en lengdeskala. Men problemet er helt ekvivalent til en varmeledningssituasjon der temperaturen er konstant lik T_0 ved $x = 0$, og T_∞ når $x \to \infty$. I dette tilfelle vil temperaturen kunne skrives $T\,(x, t) = T_0 + (T_\infty - T_0)\,\tau\,(x, t, k)$, og *da* får vi en similaritetsløsning. Som for temperaturen må vi her derfor kunne skrive løsningen som

$$b = -h\beta\left(\frac{x}{\sqrt{kt}}\right) = -h\beta\,(\eta)$$

der $\beta\,(0) = 0$ og $\beta\,(\eta) \to 1$ når $\eta \to \infty$. Vi fører inn dette i ligningen etter å ha dividert med $-h$:

$$\beta_t - k\beta_{xx} = -\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{k}}\frac{1}{t^{3/2}}\beta' - k\frac{1}{kt}\beta'' = 0,$$

eller

$$\beta'' + \frac{\eta}{2}\beta' = 0.$$

Dette er oppgitt ligning, og vi ser umiddelbart at løsningen blir

$$b\,(x, t) = -h\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{kt}}\right).$$

(c) Et mer realistisk scenario er at etterhvert som tiden går (geologisk tidsskala), vil strandkanten $s\,(t)$ *flytte seg utover. Anta at vi har en konstant volumstrøm* q_0 *ut i bassengent pr. tids- og breddeenhet ved strandkanten, og at all sand og leire tilføres på denne måten.*

Løsningen for $b\,(x, t)$ *blir da stasjonær i forhold til stranda, dvs. at* $b\,(x, t)$ *kan skrives på formen*

$$b\,(x, t) = \begin{cases} 0 & x \leq s\,(t) = Ut + x_0 \\ b_0\,(x - Ut - x_0) & x > Ut + x_0 \end{cases}$$

Bestem hastigheten U *og funksjonen* b_0.

Hvis vi kan gå ut fra den oppgitte formen på b, vil mengden av sand og leire mellom $s\,(t)$ og $x = \infty$ være konstant. Dette betyr at hastigheten som stranda avanserer med, $ds/dt = U$, må matche q_0, dvs.

$$hB \times U = q_0 B,$$

eller

$$U = \frac{q_0}{h}.$$

Vi lar nå $\eta = x - Ut - x_0$ og setter inn for b i ligningen der $x > Ut + x_0$

$$-Ub_0' = kb_0''$$

Ligningen for b_0 blir følgelig

$$b_0'' + \frac{U}{k} b_0' = 0$$

med generell løsning

$$b_0(\eta) = A + B \exp\left(-\frac{U}{k}\eta\right)$$

Her vil i tillegg

$$b_0(0) = 0,$$
$$b_0(\infty) = -h$$

slik at den spesielle løsningen her blir

$$b_0(\eta) = h\left(\exp\left(-\frac{U}{k}\eta\right) - 1\right)$$

Vi setter inn i uttrykket for b og finner

$$b(x,t) = \begin{cases} 0 & x \leq s(t) = Ut + x_0 \\ h\left(\exp\left(-\frac{U}{k}(x - Ut - x_0)\right) - 1\right) & x > Ut + x_0 \end{cases}$$

Oppgave 3

Det er foreslått å modellere forekomsten av Kongekrabbe, $K(t)$, i Varangerfjorden ved hjelp av følgende differensialligning

$$\frac{dK}{dt} = rK\left(1 - \frac{K}{M}\right)\left(\frac{K}{m} - 1\right), \ 0 < m < M.$$

(a) Hvilke egenskaper prøver modellen å beskrive og hvilke likevektspopulasjoner har vi? Vis hvordan en kan bruke lineær stabilitetsanalyse til å avgjøre stabiliteten av likevektspopulasjonene, og lag kvalitative skisser for utviklingen av $K(t)$ for $t > 0$.

Vi observerer først at bestanden vil vokse kun hvis

$$m < K < M.$$

Likevektspunktene er gitt ved

$$K = 0, m, M,$$

og ved å skissere tredjegradspolynomet $f(K)$ som utgjør høyresiden, finner vi

$$f'(0) < 0,$$
$$f'(m) > 0,$$
$$f'(M) < 0.$$

Vi utelater det enkle argumentet som avgjør stabilitet/ustabilitet, og ser altså her at 0 og M er stabile, mens m er ustabilt. Hvis bestanden er mindre enn m, vil den dø ut.

Skisse inn her

(b) En forenklet modell, som også omfatter fiskere, $F(t)$, har etter skalering formen

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{F}{2} + KF,$$
$$\frac{dK}{dt} = K(1-K) - F \tag{3}$$

Hvilke kvalitative egenskaper er bygd inn i denne modellen?

Det oppgis at banen $F = 3K(1-K)/2,\ 0 \leq K < 1$, er en løsning av lign. 3, og at denne banen deler første (F, K)-kvadrant i to separate deler. Hva skjer når systemet befinner seg i den ubegrensede delen?

Vi ser at

- hvis vi ikke har fiskere, vil veksten av Kongekrabbe følge en logisisk modell
- fiske vil minske veksten i Kongekrabbe
- hvis bestanden $K < 1/2$ er det lite interesse for fiske, slik at antall fiskere avtar
- hvis $K > 1/2$ øker antallet fiskere.

Utenfor den oppgitte banen vil $F > \max(0, 3K(1-K)/2)$, og dette betyr at $\frac{dK}{dt} < 0$. Følgelig vil krabbebestanden alltid dø ut.

(c) Bestem likevektspunktene for modellen i lign. 3 og finn ut hva de representerer. Hva ser ut til å skje i området $0 \leq K \leq 1$ og $0 \leq F \leq 3K(1-K)/2$?

De singulære punktene er gitt fra

$$-\frac{F}{2} + KF = 0$$
$$K(1-K) - F = 0$$

med løsninger $\{F = 0, K = 0\}$,$\{F = 0, K = 1\}$ og $\left\{F = \frac{1}{4}, K = \frac{1}{2}\right\}$

Det lineariserte systemet for $\{F = 0, K = 0\}$ har formen

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} f \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ k \end{bmatrix}$$

og med egenverdier $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ og $\lambda_2 = 1$, blir punktet et *sadelpunkt*. Det blir også punktet $\{F = 0, K = 1\}$. Ved å linearisere rundt punktet $\left\{F = \frac{1}{4}, K = \frac{1}{2}\right\}$ finner vi ved å sette inn $F = \left(\frac{1}{4} + f\right)$ og $K = \left(\frac{1}{2} + k\right)$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} f \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ k \end{bmatrix}$$

Dette gir $\lambda_1 = -\frac{1}{2}i$ og $\lambda_2 = \frac{1}{2}i$, og følgelig blir $\left\{F = \frac{1}{4}, K = \frac{1}{2}\right\}$ et *senter*. Dette er altså i følge lineær analyse, men mer generelt kunne dette være et stabilt eller ustabilt fokus. Hvis punktet er et senter, vil variasjonene blir virkelig periodiske, dvs. at de fortsetter i all evighet, med mindre en befinner seg nøyaktig i senteret.

Det er mulig å vise at punktet virkelig er et senter, og det enkleste er å føre inn en ny krabbevariabiel

$$K = \frac{1}{2} + \kappa$$

Da blir systemet

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \kappa F,\\ \frac{d\kappa}{dt} &= \frac{1}{4} - \kappa^2 - F\end{aligned} \tag{4}$$

og banene blir *symmetriske om aksen* $\kappa = 0$. Dette kan kun hende hvis banene rundt $\left\{F = \frac{1}{4}, \kappa = 0\right\}$ og innenfor grensebanen er lukkede.

Oppgave 4

For å modellere Kongekrabbenes spredning nedover langs Finnmarkskysten vil vi anta at de sprer seg ved "tilfeldig gang", slik at fluksen er $\mathbf{j}^* = -D\nabla^*\rho^*$, der $\rho^*(\mathbf{x}^*, t^*)$ er tettheten (antall krabber pr. flateenhet). Formeringen (pr. flateenhet) av krabbe skjer etter en forenklet modell som i oppgave 3:

$$q(\mathbf{x}^*, t^*) = r\rho^*(\mathbf{x}, t)\left[1 - \frac{\rho^*(\mathbf{x}, t)}{\rho_{\max}}\right],$$

og vi skal se bort fra fangst.

(a) Still opp bevarelsesloven for krabbe på integralform for et (todimensjonalt) område av havet og vis at differensial-formuleringen leder til en ikke-lineær diffusjonsligning som etter passende skalering kan skrives

$$\rho_t = -\nabla^2\rho + \rho(1 - \rho). \tag{5}$$

Vi betrakter et todimensonal område R og har da som vanlig

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho^* dA + \int_{\partial R} \mathbf{j}\cdot\hat{n}dS = \int_R q(\mathbf{x}^*, t^*)\, dA.$$

Ved å benytte divergensteoremet og flytte derivasjon innenfor integraltegnet finner vi

$$\int_R \left(\frac{\partial\rho^*}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} - q\right) dA,$$

og siden dette holder for alle R, vil vi følgelig få

$$\frac{\partial\rho^*}{\partial t^*} + \nabla^*\cdot(-D\nabla^*\rho^*) - r\rho^*(\mathbf{x}^*, t^*)\left[1 - \frac{\rho^*(\mathbf{x}^*, t^*)}{\rho_{\max}}\right].$$

Vi skalerer ligningen ved først å skrive

$$\rho^* = \rho_{\max}\rho.$$

For tidsskalaen kan vi se bort fra diffusjon og anta at ρ^* er liten. Da har vi $\frac{\partial \rho^*}{\partial t} \approx r\rho^*$, med tidsskalaen $T = r^{-1}$. Tilslutt lar vi den romlige skalaen X bestemmen av diffusjon ved at

$$D\frac{T}{X^2} = \mathcal{O}\left(1\right),$$

med andre ord,

$$X = \sqrt{DT}$$

Innsatt gir dette

$$\frac{\partial \rho_{\max}\rho}{r^{-1}\partial t} + \frac{\rho_{\max}}{Dr^{-1}}\nabla \cdot \left(-D\nabla\rho\right) - r\rho_{\max}\rho\left[1-\rho\right] = 0,$$

som leder til oppgitt ligning.

Nedenfor skal vi betrakte ligning 5 i en romdimensjon (x),

(6) $$\rho_t = \rho_{xx} + \rho\left(1-\rho\right).$$

(b) Ligning 6 har konstante løsninger $\rho_0 = 0$ og $\rho_1 = 1$. Sjekk stabiliteten til disse løsningene ved å føre inn perturbasjoner formen $\rho\left(x,t\right) = \rho_j + a\left(t\right)\exp(ikx)$, $j = 0, 1$.

Det er opplagt at ρ_0 og ρ_1 er løsninger. Linearisering rundt $\rho = 1$, dvs. $\rho = 1 + a\left(t\right)\exp\left(ikx\right)$ gir

$$\dot{a}\exp\left(ikx\right) = -k^2 a\exp\left(ikx\right) - a\exp\left(ikx\right)$$

dvs.,

$$\dot{a} = -\left(k^2+1\right)a.$$

Dermed ser vi, siden ligningen gir $a\left(t\right) \propto \exp\left[-\left(k^2+1\right)t\right]$, at alle perturbasjoner på denne formen dør ut. Det betyr i sin tur at alle perturbasjoner $p\left(x,t\right)$ der

$$p\left(x,t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}a\left(k,t\right)dk$$

vil dø ut.

Hvis vi gjør det samme rundt $\rho = 0$, ender vi opp med

$$\dot{a} = \left(1-k^2\right)a,$$

så her blir det kritisk hvis $k^2 < 1$. Slike "langbølgede" forstyrrelser vil begynne å vokse og $\rho = 0$ er ikke ubetinget stabil.

(c) *Det kan vises (men skal ikke utledes eller verifiseres her!) at lign. 6 har en løsning*

$$\rho\left(x,t\right) = \left(1+\exp\left(\sqrt{\frac{1}{6}}x - \frac{5}{6}t\right)\right)^{-2}$$

Hvilken situasjon beskriver denne løsningen? Anslå tiden det tar fra at krabben er observert på et sted til bestanden er av samme størrelsesorden som det maksimale hvis

$$r = 0.3\text{år}^{-1}$$

Vi observerer først at funksjonen

$$f(\alpha) = \frac{1}{(1+\exp(\alpha))^2}$$

går mot 1 når $\alpha \to -\infty$ og 0 når $\alpha \to \infty$. Overgangen fra 1 til 0 skjer i et område rundt $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} f(-5.3) &= 0.99, \\ f(2.2) &\approx 0.01. \end{aligned}$$

Argumentet $\alpha = \sqrt{\frac{1}{6}}x - \frac{5}{6}t$ sørger for at $\rho(x,t)$ oppfører seg som en bølge (front) som beveger fra $-\infty$ til $+\infty$ med hastighet

$$u = \frac{\frac{5}{6}}{\sqrt{\frac{1}{6}}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

Bak fronten er tettheten tilnærmet lik 1, og foran fronten tilnærmet 0.

Hvis vi ser på forløpet av funksjonen i $x = 0$, kan vi beregne hvor lang tid det tar fra at verdien er 0.01 til den når 0.99:

$$\begin{aligned} -\frac{5}{6}t_1 &= 2.2, \\ -\frac{5}{6}t_2 &= -5.3, \end{aligned}$$

dvs.,

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 6\frac{6}{5} - 2.2\frac{6}{5} \approx 4.5$$

Med en oppgitt verdi på $r = 0.3\text{år}^{-1}$ og tidsskalaen r^{-1}, blir

$$\Delta t \approx \frac{4.5}{r} = 15\text{år}.$$